

Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1. (10 Punkte) Die Legendre-Polynome P_n sind unter anderem gegeben durch die Rodrigues-Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

- (a) Man berechne $P_i(x)$ für $i = 1, \dots, 4$.
- (b) Man zeige $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Die $\{P_n : n = 0, 1, \dots\}$ bilden ein Orthogonalsystem. Zeigen Sie insbesondere

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}.$$

- (d) Zeigen Sie, dass die P_n der Legendreschen Differentialgleichung genügen, d.h.

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Hinweis: Setzen Sie $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$ und gewinnen Sie durch Differentiation eine Differentialgleichung 1. Ordnung. Diese $(n+1)$ -mal differenzieren (Nutzen Sie die Leibniz-Regel zur Differentiation von Produkten).

Aufgabe 8.2. Sei $f \in C[-1, 1]$. Wie müssen die Koeffizienten in $\sum_n c_n P_n$ gewählt werden, damit diese Reihe die Chance hat, gleichmäßig gegen das gegebene f zu konvergieren? Hinweis: Aufgabe 1c.

Aufgabe 8.3. (5 Punkte) Lösen Sie das Dirichlet-Problem zur Laplace-Gleichung für die Kugel $K_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ explizit unter der Randbedingung

$$u(x, y, z) = z^4$$

für $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Hinweis: Entwickeln sie die vorgegebene Randfunktion nach Kugelflächenfunktionen. Nutzen Sie dabei die Rotationsinvarianz bzgl. des Azimutwinkels φ (siehe auch Aufgabe 8.2).

Aufgabe 8.4. (Legendre-Funktionen) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ und

$$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

Zeigen Sie unter Nutzung von Aufgabe 1c, dass gilt

$$\int_{-1}^1 P_{n,m}^2(x) dx = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}.$$

Hinweis: Starten Sie mit partieller Integration. Der gleiche Trick wie in Aufgabe 1d (nur diesmal $n+m$ -mal differenzieren) führt dann zu der Rekursionsformel

$$I_m = \int_{-1}^1 P_{n,m}^2(x) dx = (n+m)(n-m+1)I_{m-1}.$$

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 05.12.2012