Mathematatik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1. **(7 Punkte)** Sei $a > 0$ und $f_a(x) = e^{-a|x|}$.

(a) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}f_a(\omega)$ und die Gesamtenergie $\int_{-\infty}^{\infty} |f_a(x)|^2\, dx$.

(b) **(5 Punkte)** Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}f(\omega)$ von

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}\,.$$

Hinweis: Differenzieren Sie $\mathcal{F}f(\omega)$ und stellen Sie eine Differentialgleichung auf. Verwenden Sie dabei geeignete Anfangsbedingungen und die Ergebnisse von (a).

Aufgabe 9.2. **(5 Punkte)** Man leite mittels Fourier-Transformation die Poisson-Formel für die Lösung des Dirichlet-Problems auf der oberen Halbebene her

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : y > 0\}, \\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

Hinweis: Fourier-Transformation in x. Nutzen Sie die Ergebnisse aus 9.1.(a). Vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabe 7.5.

Aufgabe 9.3. **(3 Punkte)** Ein Zeitsignal $f(t)$ habe die Spektralfunktion (Fouriertransformierte)

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{|w|}}{1+w^2}\,.$$

Berechnen Sie die Gesamtenergie $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ des Signals.

Aufgabe 9.4. (Heisenbergsche Unschärferelation)

(a) Bestätigen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation in Zeit und Frequenz

$$\sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt}} \cdot \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\omega \mathcal{F} f(\omega)|^2\,d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F} f(\omega)|^2\,d\omega}} \geq \frac{1}{2} \tag{1}$$

an der Funktionenschar $f_a(t)$ aus Aufgabe 9.1. Stellen Sie $f_a(t)$ und $\mathcal{F}f_a(\omega)$ für die Parameter $a = 1/2, 1, 2$ graphisch dar.

(b) Können Sie sich eine Funktion vorstellen, die in Zeit und Frequenz optimal lokalisiert ist, d.h. für die die untere Schranke in (1) angenommen wird?

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 12.12.2012.