

Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1. Sei $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Weisen Sie nach, dass dann auch die Potenzreihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j j (z - z_0)^{j-1}$$

den Konvergenzradius R hat.

Aufgabe 10.2. (4 Punkte) Man berechne Real- und Imaginärteil, sowie Betrag und Argument folgender komplexer Zahlen

a) $\frac{1+i}{1-(i+1)^2}$

b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{99}$

c) $\frac{2-i}{3i+(1-i)^2}$

d) $\left(\frac{2i}{1-i}\right)^9$

Aufgabe 10.3. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

a) $z^7 + 4 = 0$

b) $z^6 + 64 = 0$

Aufgabe 10.4. Auf der Isla de Muerta liegt ein Piratenschatz in einer Höhle vergraben. Kapitän Jack Sparrow besitzt ein Fragment einer Schatzkarte, auf der befindet sich im Norden ein Galgen, im Osten 3 Felsbrocken und im Westen eine Palme. Außerdem stehen Hinweise vermerkt, die zum Schatz führen:

1. Gehe direkt vom Galgen zur Palme, dann gleichviele Schritte unter rechtem Winkel nach links. Stecke dort die erste Fahne!
2. Gehe vom Galgen zu den 3 Felsbrocken, genauso weit unter rechtem Winkel nach rechts. Stecke dort die zweite Fahne!
3. Der Schatz liegt in der Mitte der beiden Fahnen begraben.

Leider ist der Galgen nicht mehr da. Jack Sparrow findet den Schatz trotzdem. Wie macht er das? (Hinweis: Man rechne komplex!)

Aufgabe 10.5. (8 Punkte)

- (a) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$: $\cosh(z) = \cos(iz)$, $\cos(z) = \cosh(iz)$, $\sinh(z) = -i \sin(iz)$, $\sin(z) = -i \sinh(iz)$. Beweisen Sie den trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- (b) Berechnen Sie $\sin(\pi + 3i)$ und $\cosh(i)$.
- (c) Für welche Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $\sin(z) = 1000$?
- (d) Welche komplexen Zahlen lösen die nachfolgenden Gleichungen: $e^z = 3$, $e^z = 2 + 3i$, $e^z = e + 2\pi i$?

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 19.12.2012.