Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1. In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

$\boxed{\textbf{(a)}}$ $f(x+iy) = xy + ixy$, **(2 Punkte)**

(b) $f(x+iy) = y^2 \sin x + iy$,

$\boxed{\textbf{(c)}}$ $f(x+iy) = -6(\cos x + i \sin x) + (2-2i)y^3 + 15(y^2+2y)$, **(2 Punkte)**

(d) $f(x+iy) = \sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)$,

$\boxed{\textbf{(e)}}$ $f(z) = \sqrt{|Rez \cdot Imz|}$, **(2 Punkte)**

$\boxed{\textbf{(f)}}$ $f(z) = zRez$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 11.2. Bestimmen Sie für nachfolgende Funktionen u jeweils alle Funktionen v so, dass $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex differenzierbar wird.

(a) $u_1(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$,

$\boxed{\textbf{(b)}}$ $u_2(x,y) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^y \cos x$. **(2 Punkte)**

$\boxed{\textbf{Aufgabe 11.3.}}$ **(2 Punkte)** Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar und es sei $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$. Berechnen Sie $g'(z)$. Wie verhält es sich mit der Funktion $h(z) := \overline{f(z)}$?

Aufgabe 11.4. Bestimmen Sie zu der harmonischen Funktion $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ eine harmonische Funktion $v(x,y)$ so, dass die komplexe Funktion

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

differenzierbar ist.

Aufgabe 11.5. Sei $k \in \mathbb{N}$. Weisen Sie für alle komplexen z mit $|z| < 1$ die Gültigkeit der folgenden Identität nach:

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} z^{j-k}.$$

Aufgabe 11.6. **(4 Punkte)** Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - iz^2 - z + i}$$

in eine Potenzreihe mit Zentrum $z_0 = 0$ bzw. $z_0 = 2$ und bestimmen Sie jeweils die Konvergenzradien.

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 09.01.2013