Mathematatik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1. **(4 Punkte)** Es sei $f(z) = |z|^2$. Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)dz$, wobei

a) γ der geradlinige Weg von $z_0 = 1$ nach $z_1 = i$ sei.

b) γ der Weg entlang des Einheitskreises (math. positiv) von $z_0 = 1$ nach $z_1 = i$ sei.

Besitzt die Funktion f eine Stammfunktion in $\mathbb{C}$?

Aufgabe 12.2. **(3 Punkte)** Die komplexwertige Funktion f sei in einer Umgebung von $z_0 = 0$ definiert und dort stetig. Beweisen Sie

a) $\lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})d\varphi = 2\pi f(0)$.

b) $\lim_{r\to 0} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0)$.

Aufgabe 12.3. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma ze^z dz$, wobei γ durch die Parametrisierung $z(t) = (t-1)\pi i + t\pi i$, $0 \leq t \leq 1$, gegeben sei.

Aufgabe 12.4. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \mathrm{Re} z dz$ entlang der folgenden Wege:

a) Längs der oberen Hälfte des Einheitskreises von $+1$ nach -1.

b) Die geradlinige Strecke von z_1 nach z_2.

c) Entlang des positiv umlaufenden Kreises mit Zentrum z_0 und Radius r.

Aufgabe 12.5. **(5 Punkte)** Der Weg γ sei gegeben durch die Parameterdarstellung $z(t) = z_1 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, wobei $z_1 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ fest sind. Berechnen Sie für $z_0 \notin \gamma$ alle Integrale der Form

$$\int_\gamma (z - z_0)^k dz, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $z_0 = z_1$ (siehe auch das Beispiel aus der Vorlesung). Für den Fall $z_0 \neq z_1$ nutzen Sie dann die Identitäten

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_1} \cdot \frac{1}{1-w} = \frac{1}{z-z_1} \sum_{k=0}^{\infty} w^k,$$

wobei $w = \frac{z_0-z_1}{z-z_1}$ für $z_0 \in B_r(z_1)$, bzw.

$$\frac{1}{z-z_0} = -\frac{1}{z_0-z} \cdot \frac{1}{1-v} = -\frac{1}{z_0-z_1} \sum_{k=0}^{\infty} v^k$$

mit $v = \frac{z-z_1}{z_0-z_1}$ für $z_0 \notin \overline{B_r(z_1)}$.

Aufgabe 12.6. **(3 Punkte)** Es seien $\mathcal{G} = \mathbb{C} \setminus [0,1]$ und $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$.

a) Ist $\mathcal{G}$ ein Sterngebiet?

b) Zeigen Sie, dass $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathcal{G}$.

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 16.01.2013.