Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 13

$\boxed{\textbf{Aufgabe 13.1.}}$ **(3 Punkte)** Berechnen Sie die Integrale

$$\textbf{(a)} \int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}\,\mathrm{d}z, \quad \textbf{(b)} \int_{|z|=1} \frac{z}{2z+1}\,\mathrm{d}z, \quad \textbf{(c)} \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z^2+4)}\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 13.2. Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bestimme man die Integrale

$$\boxed{\textbf{(a)}}\ \textbf{(3 Punte)} \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}, \quad \textbf{(b)} \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z+z^2}, \quad , \boxed{\textbf{(c)}}\ \textbf{(3 Punte)} \int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Warum kann man Satz 6 aus der Vorlesung (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete) nicht direkt anwenden?

<u>Hinweis:</u> Partialbruchzerlegung und Integration entlang geeigneter Kreise.

Aufgabe 13.3. Mit Hilfe von Integralsatz und Integralformel berechne man die Fouriertransformation von

$$\textbf{(a)}\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \boxed{\textbf{(b)}}\ \textbf{(4 Punte)}\ f(x) = e^{-x^2/2}$$

<u>Hinweis:</u> **(a)** Integrieren Sie zunächst über die oberen Halbkreise mit Radius R und Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Betrachten Sie anschließend $R \to \infty$. Zur Kontrolle siehe Aufgabe 9.1.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ia)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

unabhängig von $a > 0$ gilt. Nutzen Sie dazu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} = \sqrt{\pi}$. Verwenden Sie diese Formel dann zur Herleitung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}a^2}.$$

(vgl. Lemma I.7 aus der Vorlesung)

$\boxed{\textbf{Aufgabe 13.4.}}$ **(3 Punkte)** Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, dass der Hauptzweig des Logarithmus $\log z$ holomorph ist in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

Hinweis: Zeigen Sie die Identität

$$\log z = \int_{[1,z]} \frac{1}{\zeta} \, \mathrm{d}\zeta$$

auf $\mathbb{C}^-$ als Sterngebiet mit Zentrum $z_0 = 1$. Wählen Sie dazu einen geeigneten geschlossenen Weg.

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 23.01.2013.