Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 14

$\boxed{\textbf{Aufgabe 14.1.}}$ **(4 Punkte)** Entwickeln Sie den Hauptzweig $\log z$ des Logarithmus in eine Taylorreihe in den Punkten

$$\textbf{(a) } z_0 = 1, \qquad \textbf{(b) } z_0 = -1 + i.$$

Was kann man über die Konvergenzradien aussagen? Zeigen Sie, dass die Reihe in (b) auch in $z = -1 - \varepsilon i$ konvergiert für ein hinreichend klein gewähltes $\varepsilon > 0$? Stimmt die Reihe dort mit $\log z$ überein? Berechnen Sie den Wert!

Aufgabe 14.2. (Schwarzsches Lemma) Eine Funktion $f(z)$ sei holomorph auf dem Einheitskreis. Es gelte $\left|f(z)\right| < 1$ für $|z| \leq 1$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie die schärfere Ungleichung $\left|f(z)\right| \leq |z|$ für $|z| \leq 1$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $h(z) = f(z)/z$ holomorph ist und nutzen Sie die Cauchysche Integralformel für $h^n(z)$ $n \in \mathbb{N}$ (Das ist das Schwarzsche Lemma!).

$\boxed{\textbf{Aufgabe 14.3.}}$ **(4 Punkte)** Gibt es eine um $z_0 = 0$ holomorphe Funktion f, sodass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f(1/n) = (-1)^n/n$ $\boxed{\textbf{(b)}}$ **(2 Punkte)** $f(1/n) = (n^2 - 1)^{-1}$

(c) $\left|f^{(n)}(0)\right| \geq (n!)^2$ $\boxed{\textbf{(d)}}$ **(2 Punkte)** $\left|f(1/n)\right| \leq e^{-n}$

$\boxed{\textbf{Aufgabe 14.4.}}$ **(4 Punkte)** Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Laurentreihen in den angegebenen Kreisringen:

$\boxed{\textbf{(a)}}$ **(2 Punkte)** $f(z) = \frac{3}{(z+1)(z-2)}$ in $B_{1,2}(0)$,

(b) $f(z) = \sin \frac{z-1}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$\boxed{\textbf{(c)}}$ **(2 Punkte)** $f(z) = \frac{4z-z^2}{(z^2-4)(z+1)}$ in $B_{1,2}(0)$, $B_{2,\infty}(0)$ und $B_{0,1}(0)$.

$\boxed{\textbf{Aufgabe 14.5.}}$ **(2 Punkte)** Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche der folgenden Laurent-Reihen:

$\boxed{\textbf{(a)}}$ **(1 Punkt)** $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{|k|!}$,

(b) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{3^k+1}$,

$\boxed{\textbf{(c)}}$ **(1 Punkt)** $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{e^{\alpha k}+e^{-\alpha k}}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 14.6. Finden Sie alle ganzen Funktionen, die der Funktionalgleichung

$$f(z^2) = f(z)^2, z \in \mathbb{C},$$

genügen!

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 30.01.2013.