Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 14 - Musterlösung

Aufgabe 14.1. Das Holomorphiegebiet des Hauptzweigs des Logarithmus $f(z) = \log z$ ist $\mathbb{C}^- = \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, siehe Aufgabe 13.4. Auf diesem Gebiet sind die Ableitungen gegeben durch

$$f^{(j)}(z) = (-1)^{j+1}(j-1)!z^{-j}.$$

Entwickeln von f in einer Taylorreihe um z_0 ergibt somit

$$g(z) = f(z_0) + \sum_{j=1}^{\infty}(j!)^{-1}(z-z_0)^j f^{(j)}(z_0) = \log z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \frac{(z-z_0)^j}{z_0^j}. \qquad (1)$$

Die Reihe $g(z)$ hat den Konvergenzradius $R = |z_0|$.

(a) Für $z_0 = 1$ gilt $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < 1\} \subset \mathbb{C}^-$. Der Konvergenzkreis reicht also gerade bis an den Rand des Holomorphiegebietes von f. Die Funktion $g(\cdot)$ ist auf dem Konvergenzkreis holomorph und stimmt dort mit f überein, d.h.

$$g(z) = f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}(z-1)^j, \quad |z-1| < 1. \qquad (2)$$

(b) Für $z_0 = -1 + i$ ergibt sich der Konvergenradius von g zu $R = \sqrt{2}$. Der Konvergenzkreis von g reicht folglich über den Rand des Holomorphiegebiet von f hinaus.

Betrachte $z = -1 - \varepsilon i$ für $\varepsilon > 0$. Die Reihe g konvergiert also noch im Punkt z, wenn wir ε klein genug wählen. Aber gilt auch $g(z) = f(z)$? Aus (1) folgt

$$g(z) = \log(z_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}(z/z_0 - 1)^j. \qquad (3)$$

Wegen $|z - z_0| = (1 + \varepsilon)$ und somit $\left|z/z_0 - 1\right| = (1+\varepsilon)/\sqrt{2} < 1$, liegt z/z_0 innerhalb des Konvergenzkreises aus (a). Damit vereinfacht sich (3) zu

$$g(z) = \log(z_0) + \log(z/z_0)$$

Wie wir in der Vorlesung bereits gesehen haben, gilt im Komplexen im Allgemeinen nicht $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Wir können oben also nicht einfach $g(z) = f(z)$ folgern.

In der Tat, indem wir $z = \sqrt{1+\varepsilon^2}e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, -\pi/2]$, schreiben, sehen wir folgendes:

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \log(z_0) + \log(z/z_0) \\
&= \ln\sqrt{2} + i\frac{3}{4}\pi + \ln\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\sqrt{2}} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{3}{4}\pi\right) \bmod (-\pi, \pi]}_{=:\varphi_1} \\
&= \ln\left(|z|\right) + i\varphi + i\left(\varphi_1 - (\varphi - \frac{3}{4}\pi)\right).
\end{aligned}
$$

Wegen $\varphi \in (-\pi, -\pi/2$ ist $\varphi - \frac{3}{4}\pi \in (-2\pi, -\pi)$, also $\varphi_1 - (\varphi_0 - \frac{3}{4}\pi) = 2\pi$. Wir schließen

$$g(z) = \log(z) + 2\pi i \neq f(z).$$

für die spezielle Wahl von z. Die Reihe (1) stellt also für $z_0 = -1 + i$ nicht überall auf ihrem Konvergenzkreis die Funktion $\log(z)$ dar. Für $|z - z_0| < 1$ gilt allerdings $g(z) = \log(z)$ (Dies folgt auch aus Satz 8 aus der Vorlesung).

Aufgabe 14.2. Wir entwickeln f in eine Taylorreihe um $z_0 = 0$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \tag{4}$$

mit $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Der Konvergenzradius von (4) ist mindestens 1. Weiter folgt aus der Annahme $f(0) = 0$ sofort, dass $a_0 = 0$.

Nun hat die Reihe $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} z^j$ den gleichen Konvergenzradius wie (4), ist somit holomorph auf $B_1(0)$. Da $zg(z) = f(z)$, gilt $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ für $z \in B_1(0)$, $z \neq 0$.

Wir wenden nun die Cauchysche Integralformel für $g^n(z)$ an, das ebenfalls holomorph auf $B_1(0)$ ist.

$$
\begin{aligned}
\left|g(z)\right|^n &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{g^n(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq \max_{\zeta\in\partial B_1(0)} \frac{\left|g(\zeta)\right|^n}{|\zeta - z|} = \max_{\zeta\in\partial B_1(0)} \frac{\left|f(\zeta)\right|^n}{|\zeta|^n|\zeta - z|} \\
&\leq \max_{\zeta\in\partial B_1(0)} \frac{1}{|\zeta - z|} = \operatorname{dist}(z, \partial B_1(0))^{-1}
\end{aligned}
$$

Also

$$\left|g(z)\right| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial B_1(0))^{1/n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

Damit folgt $\left|f(z)\right| \leq |z|$.

Aufgabe 14.3. (a) Die Annahme $f(1/n) = (-1)^n/n$ für fast alle n hat zur Folge, dass f abzählbar viele Nullstellen haben müsste, deren Häufungspunkt die 0 wäre (aus der

Stetigkeit folgt $f(0) = 0$). Nach dem Identitätssatz (Satz 10/(iii)) muss f dann aber die Nullfunktion sein.

(b) Die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \frac{z}{1-z^2}$$

ist holomorph in einer Umgebung um $z_0 = 0$ und es gilt $\tilde{f}(1/n) = (n^2-1)^{-1}$. Sei f holomorph auf $B_\varepsilon(0)$ und erfülle $f(1/n) = (n^2-1)^{-1} = \tilde{f}(1/n)$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt $f(0) = 0$ und die Identitätsmenge

$$\left\{0, \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \ldots\right\} \subset \left\{w \in \mathbb{C} : \tilde{f}(w) = f(w)\right\} =: I(f, \tilde{f})$$

hat den Häufungspunkt $0 \in I(f, \tilde{f})$. Gemäß Satz 10/(iii) (Identitätssatz) gilt $f = \tilde{f}$.

Es gibt also genau eine holomorphe Funktion, die Bedingung (b) erfüllt.

(c) Angenommen, f sei holomorph in $B_\varepsilon(0)$. Wir entwickeln f in eine Taylorreihe um $z_0 = 0$:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}.$$

Nach Annahme ist $\left|a_j\right| \geq j!$. Also $\left|a_j\right|^{1/j} \geq (j!)^{1/j}$. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass $(j!)^{1/j} \to \infty$ für $j \to \infty$. Also ist $R = 1/\limsup_{j\to\infty}\left|a_j\right|^{1/j} = 0$. Ein Konvergenzradius von 0 ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass f holomorph ist.

Es gibt also keine holomorphe Funktion, die (c) genügt.

(d) Angenommen, f sei holomorph in $B_\varepsilon(0)$. Wir beweisen per Induktion, dass $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Der Induktionsanfang $f(0) = 0$ folgt direkt aus der Annahme $\left|f(1/n)\right| \leq e^{-n}$ für fast alle n.

Wir nehmen jetzt an, dass $f^{(k)}(0) = 0$ für $k = 0, \ldots, \ell$. Zu $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ζ_n, sodass

$$f(1/n) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1/n)^k + (1/n)^{\ell+1}\frac{f^{(\ell+1)}(\zeta_n)}{(\ell+1)!} = (1/n)^{\ell+1}\frac{f^{(\ell+1)}(\zeta_n)}{(\ell+1)!}.$$

Das ist der reelle Satz von Taylor! Nicht verwechseln mit dem Satz von Cauchy-Taylor aus der Vorlesung (Satz 8). Auflösen nach $f^{(\ell+1)}(\zeta_n)$ ergibt

$$\left|f^{(\ell+1)}(\zeta_n)\right| = (\ell+1)!n^{\ell+1}\left|f(1/n)\right| \leq (\ell+1)!n^{\ell+1}e^{-n}.$$

Da $\zeta_n \in \left[0, 1/n\right]$ und die Ableitung stetig ist, folgt

$$\left|f^{(\ell+1)}(0)\right| = \left|f^{(\ell+1)}(\lim_n \zeta_n)\right| = \lim_n\left|f^{(\ell+1)}(\zeta_n)\right| \leq \lim_n(\ell+1)!n^{\ell+1}e^{-n} = 0.$$

Also müssen alle Ableitung von f in der Null verschwinden. Somit ist f die Nullfunktion (siehe Satz 10).

Aufgabe 14.4. (a) Partialbruchzerlegung liefert uns

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2}.$$

Weiter gilt für $|z| > 1$

$$-\frac{1}{1+z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1+1/z} = \sum_{j=0}(-1)^{j+1}z^{-j-1}.$$

Für $|z| < 2$ gilt

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} = -\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} z^j.$$

Zusammengefasst liefert dies für $1 < |z| < 2$

$$\frac{3}{(z+1)(z-2)} = \sum_{j=-\infty}^{-1}(-1)^j z^j - \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} z^j.$$

(b) Wir schreiben

$$\sin\left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{e^{i\frac{z-1}{z}} - e^{-i\frac{z-1}{z}}}{2i}$$

und machen uns den Zusammenhang $e^z = \sum_{j=0}^{\infty} z^j/j!$ zu nutze.

$$\sin\left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{e^i(-i)^j}{j!} - \frac{e^{-i}i^j}{j!}\right] z^{-j}.$$

(c) Partialbruchzerlegung ergibt

$$f(z) = \frac{1}{3(z-2)} - \frac{3}{z+2} + \frac{5}{3(z+1)}.$$

Kreisring $B_{1,2}(0)$: Für die drei Partialbrüche erhalten wir

$$\frac{5}{3(z+1)} = \frac{5}{3z}\frac{1}{1+1/z} = \frac{5}{3z}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^j = \frac{5}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{z^{j+1}}, \quad |z| > 1,$$

$$\frac{1}{3(z-2)} = -\frac{1}{6(1-z/2)} = -\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^j, \quad |z| < 2,$$

$$-\frac{3}{z+2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{1+z/2} = -\frac{3}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^j, \quad |z|<2.$$

Also:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{5}{3}(-1)^{-j+1}z^j}_{\text{Hauptteil}, |z|>1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^j - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^j\right]z^j}_{\text{reglärer Teil}, |z|<2}.$$

Kreisring $B_{2,\infty}(0)$: Gegenüber dem letzten Abschnitt müssen wir nur zwei Partialbrüche anders entwickeln:

$$\frac{1}{3(z-2)} = \frac{1}{3z}\frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{3}\sum_{j=-\infty}^{-1}2^{-j-1}z^j, \quad |z|>2,$$

$$-\frac{3}{z+2} = -\frac{3}{z}\sum_{j=0}^{\infty}(-2/z)^j = 3\sum_{j=-\infty}^{-1}(-1)^{-j}2^{-j-1}z^j, \quad |z|>2,$$

Also:

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{-1}\left[\frac{5}{3}(-1)^{-j+1} + 2^{-j-1}\left(\frac{1}{3} + 3(-1)^{-j}\right)\right]z^j.$$

Kreisring $B_{0,1}(0)$: Diesmal müssen wir nur einen Partialbruch anders als im ersten Abschnitt entwickeln:

$$\frac{5}{3(z+1)} = \frac{5}{3}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j z^j, \quad |z|<1.$$

Also:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{5}{3}(-1)^j - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^j - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^j\right]z^j$$

Aufgabe 14.5. (a) Der reguläre Teil $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z$ hat offensichtlich einen Konvergenzradius von $R=\infty$. Für den Hauptteil gilt $(1/k!)^{1/k} \to 0$, wenn $k\to\infty$. Also besagt die Formel von Cauchy-Hadamard, dass der Hauptteil für $\left|1/z\right| < \infty$ konvergiert. Insgesamt erhalten wir den Konvergenzbereich $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(b) Der Hauptteil der Laurent-Reihe lässt sich schreiben als $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{(z-1)^k}$ mit $a_k = (3^{-k}+1)^{-1}$. Man überzeugt sich leicht, dass $|a_k|^{1/k} \to 1$. Der Hauptteil konvergiert also für $|z-1|>1$.

Der reguläre Teil ist gegeben durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-1)^k$ mit $a_k = (3^k+1)^{-1}$. Wieder überzeugt man sich leicht, dass $|a_k|^{1/k} \to 1/3$. Also konvergiert der reguläre Teil für $|z-1|<3$. Insgesamt haben wir Konvergenz für $1<|z-1|<3$.

(c) Fall $\alpha = 0$: Der Hauptteil konvergiert auf $\{|z|>1\}$, wohingegen der reguläre Teil auf $\{|z|<1\}$ konvergiert. Der Konvergenzbereich ist somit leer,

$$\{|z|>1\} \cap \{|z|<1\} = \emptyset.$$

Für den Fall $\alpha \neq 0$ betrachten wir o.B.d.A. $\alpha > 0$. Dann haben Haupt- und regulärer Teil jeweils die Darstellung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}, \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

wobei $a_k = \left(e^{\alpha k} + e^{-\alpha k}\right)^{-1}$. Wegen

$$a_k = \frac{1}{e^{\alpha k}\left(1+e^{-2\alpha k}\right)} \leq e^{-\alpha k}$$

können wir abschätzen, dass $|a_k|^{1/k} \leq e^{-\alpha}$. Gleichzeitig gilt auch die Abschätzung

$$a_k = \frac{1}{e^{\alpha k}\left(1+e^{-2\alpha k}\right)} \geq \frac{1}{2} e^{-\alpha k},$$

woraus $|a_k| \geq 2^{-1/k} e^{-\alpha}$ folgt. Somit $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = e^{-\alpha}$.

Für den regulären Teil liegt damit Konvergenz auf $\{|z|<e^{\alpha}\}$ vor, für den Hauptteil auf $\left\{\left|1/z\right| < e^{\alpha}\right\}$. Wir erhalten also insgesamt als Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\left\{e^{-\alpha} < |z| < e^{\alpha}\right\}.$$

Aufgabe 14.6. Nach Annahme ist f eine ganze Funktion. Somit besitzt sie auf ganz $\mathbb{C}$ eine Darstellung als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Für $f(z^2)$ gilt somit $f(z^2) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{2j}$. Ferner gilt

$$f(z)^2 = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i a_j z^i z^j = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j,$$

wobei $b_j = \sum_{k=0}^{j} a_k a_{j-k}$. Ein Koeffizientenvergleich ergibt, dass $b_j = 0$ für ungerade j und $b_j = a_{j/2}$ für gerade j gelten muss, soll $f(z^2) = f(z)^2$ erfüllt sein.

Wir zeigen nun folgendes: Sei $a_l \neq 0$ der erste nichtverschwindende Koeffizient von f, d.h. $a_0 = \cdots = a_{l-1} = 0$. Dann gilt $a_l = 1$ und $a_k = 0$ für $k > l$.

Betrachte dazu zunächst b_{2l}. Es gilt

$$a_l = b_{2l} = \sum_{k=0}^{2l} a_k a_{2l-k} = a_l^2$$

Daraus ergibt sich sofort $a_l = 1$. Betrachte nun b_{2l+1}.

$$0 = b_{2l+1} = \sum_{k=0}^{2l+1} a_k a_{2l+1-k} = 2a_l a_{l+1}.$$

Daraus ergibt sich sofort $a_{l+1} = 0$. Betrachten wir nun

$$0 = a_{l+1} = b_{2l+2} = \sum_{k=0}^{2l+2} a_k a_{2l+2-k} = 2a_l a_{l+2},$$

so erhalten wir $a_{l+2} = 0$. Iterativ ergibt sich nun $0 = b_{2l+k} = 2a_l a_{l+k}$ und somit $a_{l+k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Im Ergebnis sehen wir also, dass genau die Polynome $f(z) = z^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ die Funktionalgleichung $f(z^2) = f(z)^2$ erfüllen.