Mathematatik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 15

Aufgabe 15.1. Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen im Nullpunkt. Geben Sie jeweils den Hauptteil der Laurententwicklung an.

(a) $\frac{\sin z}{z^n}$ **(b)** $\frac{z}{(z+1)\sin(z^n)}$

(c) $\cos(1/z)\sin(1/z)$ **(d)** $\left(1 - z^{-n}\right)^{-k}$, $n, k \in \mathbb{N}$

Aufgabe 15.2. Man bestimme Lage und Art der Singularitäten für die folgenden Funktionen. Berechnen Sie außerdem die entsprechenden Residuen.

(a) $\frac{z^2+i}{z^4+1}$ **(b)** $\frac{e^z-1}{z^2(z-1)^3}$ **(c)** $\cos\left(\frac{1-z}{z}\right)$

(d) $\frac{z^4+18z^2+9}{4z(z^2+9)}$ **(e)** $\frac{e^{1/(z-1)}}{z}$

Wie gewinnt man in (a) und (d) die Partialbruchzerlegung?

Aufgabe 15.3. Man gebe für

$$f(z) = \frac{z(i+1)+1}{z^3 - 2iz^2 - z}$$

alle möglichen Laurent-Reihenentwicklungen samt Konvergenzbereich um den Punkt $z = -i$ an.

Aufgabe 15.4. Man berechne mittels Residuenkalküls die reellen Integrale

(a)

$$\int_0^{2\pi} \sin^n t \, \mathrm{d}t, \ \int_0^{2\pi} \cos^n t \, \mathrm{d}t, \ n \in \mathbb{N},$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t},$$

Bestätigen Sie das Resultat, indem Sie (auf anderem Wege) eine Stammfunktion des Integranden finden (Hinweis: Substitution $x = \tan(t/2)$)

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1}\, \mathrm{d}x,$$

(d)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1}\, \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Wählen Sie den in Abbildung 1 dargestellten Integrationsweg.

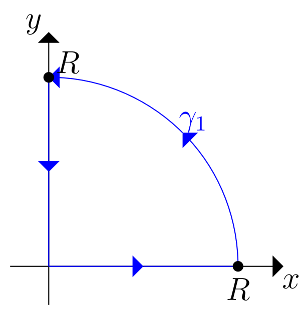

Abbildung 1: Hinweis zu Aufgabe 15.4.

Warum würde die Integration über den oberen Halbkreis nicht zum Ziel führen?

Aufgabe 15.5. Bestätigen Sie den Satz von Casorati-Weierstraß an der Funktion $e^{1/z}$:

(a) In jeder Umgebung $h(0)$ gibt es unendlich viele Lösungen der Gleichung $e^{1/z} = z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) Es gibt eine Folge $z_n \to 0$ mit $\left|e^{1/z_n}\right| = 1$ und $\left\{e^{1/z_n}\right\}_n$ ist nicht konvergent.