Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 15 - Musterlösung

Aufgabe 15.1. (a)

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z^n} &= \frac{1}{z^n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}(-1)^j \\ &= \frac{1}{z^n}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right) \\ &= \frac{1}{z^{n-1}}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^{n-3}}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^{n-5}}-\dots\end{aligned}$$

Die Funktion hat einen Pol der Ordnung $n-1$. Der Hauptteil der Laurentreihe ergibt sich damit zu

1. Fall: n gerade Setze $n=2m$.

$$f_1(z)=\frac{1}{z^{n-1}}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^{n-3}}+\dots+\frac{1}{(2m-1)!}\frac{(-1)^m}{z}.$$

2. Fall n ungerade Setze $n=2m+1$.

$$f_1(z)=\frac{1}{z^{n-1}}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^{n-3}}+\dots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!z^2}.$$

(b) Wir bestimmen zunächst die Laurentreihe von $\frac{1}{\sin z}$:

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z(1-\frac{z^2}{3!}+\dots)}=\frac{1}{z}g(z),\ g(0)=1,$$

wobei g holomorph in $z=0$. Die Laurentreihe kann also geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z}+a_0+a_1x+\dots \\ \Longrightarrow \frac{1}{\sin z^n} &= \frac{1}{z^n}+a_0+a_1z^n+\dots.\end{aligned}$$

Die Laurentreihe von $\frac{z}{z+1}$ hat einen verschwindenden Hauptteil in $z = 0$, da sie dort holomorph ist. Um die Taylorkoeffizienten von $\frac{z}{z+1}$ zu bestimmen, beobachten wir

$$\begin{aligned}\frac{z}{z+1} &= 1 - \frac{1}{z+1} \\ &= 1 - \frac{1}{1-(-z)} \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{\infty}(-z)^j, \quad |z| < 1 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}z^j.\end{aligned}$$

Der Hauptteil der Laurent-Reihe von $\frac{z}{(z+1)\sin z^n}$ ist also

$$\frac{1}{z^n}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1}z^j.$$

Es handelt sich also um eine $(n-1)$-fache Polstelle.

(c)

$$\cos(1/z)\sin(1/z) = 1/2\sin(2/z),$$

es handelt sich um eine wesentliche Singularität. Der Hauptteil der Laurentreihe ist

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j 2^{2j}}{(2j+1)!}z^{-(2j+1)}.$$

(d) Aus Übungsaufgabe 11.5 wissen wir

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^k = \sum_{j=k-1}^{\infty}\binom{j}{k-1}z^{j-k+1}.$$

Also

$$\left(\frac{1}{1-z^-n}\right) = \sum_{j=k+1}^{\infty}\binom{j}{k-1}z^{-n(j-k+1)}$$

Das geht aber nur für $|z| > 1$, also $|z|^{-n} < 1$! Somit würden wir auf diesem Weg nur die Laurent-Entwicklung auf der Kreisscheibe $B_{1,\infty}$ Wir sind aber an der Laurent-Entwicklung auf der Kreischeibe $B_{0,r}(0)$ für ein $r > 0$ interessiert. Also VORSICHT.

Um die Entwicklung in $B_{0,r}(0)$ zu bekommen, machen wir folgendes:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-z^{-n}}\right)^k = \left(\frac{z^n}{z^n-1}\right)^k &= z^{nk}(-1)^k\left(\frac{1}{1-z^n}\right)^k \\ &\overset{\text{ÜA 11.5}}{=} z^{nk}(-1)^k\sum_{j=k-1}^{\infty}\binom{j}{k-1}z^{n(j-k+1)}.\end{aligned}$$

Daraus können wir ablesen, dass der Hauptteil verschwindet. Es liegt also ein hebbare Singularität vor.

Aufgabe 15.2. (a)

$$\frac{z^2+i}{z^4+1} = \frac{z^2+i}{(z^2+i)(z^2-i)} = \frac{1}{z^2-i} = \frac{1}{(z-e^{i\pi/4})(z+e^{i\pi/4})}.$$

Also sind $z_0 = e^{i\pi/4}$ und $z_1 = -e^{i\pi/4}$ Pole erster Ordnung und es gilt

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f \overset{(11)\text{ Vorlesung}}{=} \frac{1}{2e^{i\pi/4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i,$$
$$\operatorname*{Res}_{z_1} f \overset{(11)\text{ Vorlesung}}{=} -\frac{1}{2e^{i\pi/4}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i.$$

(b) Der Punkt $z = 0$ ist ein Pol erster Ordnung, $z = 1$ ein Pol dritter Ordnung.

$$\operatorname*{Res}_{0} f = \left.\frac{e^z-1}{z(z-1)^3}\right|_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{z + z^2/2 + z^3/3! + \dots}{z(z-1)^3} = -1.$$
$$\operatorname*{Res}_{1} f \underset{(13)\text{ Vorlesung}}{=} \left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{e^z-1}{z^2}\right|_{z=1} = \left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^z z^2 - (e^z-1)2z}{z^4}\right|_{z=1}$$
$$= \left.\frac{1}{2}\frac{e^z(z-1)z^3 - 3z^2(e^z(z-2)+2)}{z^6}\right|_{z=1} = \frac{3}{2}e - 3.$$

(c)

$$\cos\left(\frac{1-z}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i(1/z-1)} + e^{i(1-1/z)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i}e^{i/z} + e^{i}e^{-i/z}\right).$$

Entwicklung in einer Reihe ergibt

$$\cos\left(\frac{1-z}{z}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-i}\frac{i^k}{k!} + e^{i}\frac{(-i)^k}{k!}\right)z^{-k}.$$

Also ist $z = 0$ eine wesentliche Singularität, denn für k gerade sind die Koeffizienten der Reihe verschieden von 0.

$$\operatorname*{Res}_{0} f = e^{-i}\frac{i}{1} + e^{i}\frac{-i}{1} = 0.$$

(d)

$$\frac{z^4+18z^2+9}{4z(z^2+9)} = \frac{1}{4}\frac{z^4+9z^2+9z^2+9}{z^3+9z} = \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}\frac{9z^2+9}{z^3+9z}.$$

Die Singularitäten sind $z_0 = 0$, $z_1 = 3i$ und $z_2 = -3i$, wobei es sich in allen drei Fällen um einfache Pole handelt.

$$\operatorname*{Res}_{0} f \underset{(11)\text{ Vorlesung}}{=} \frac{1}{4}\frac{9z^2+9}{z^2+9}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{3i} f \underset{(11)\text{ Vorlesung}}{=} \frac{1}{4}\frac{9z^2+9}{z(z+3i)}\bigg|_{z=3i} = 1,$$

$$\operatorname*{Res}_{-3i} \underset{(11)\text{ Vorlesung}}{=} \frac{1}{4}\frac{9z^2+9}{z(z-3i)}\bigg|_{z=-3i} = 1.$$

(e) Die Funktion $\frac{e^{1/(1-z)}}{z}$ hat eine wesentliche Singularität in $z=1$ und einen Pol erster Ordnung in $z=0$. Entwicklung des Nenners und des Zählers in eine Reihe ergibt

$$\frac{1}{z}e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[-(z-1)\right]^j \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(z-1)^{-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(z-1)^j.$$

Wir bestimmen den Koeffizienten b_{-1}, da dieser das Residuum $\operatorname{Res}_1 f$ liefert.

$$\begin{aligned} b_{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{(j+1)!} \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!} = 1-\frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Also $\operatorname{Res}_1 f = 1-1/e$.

$$\operatorname*{Res}_{0} f = \lim_{z\to 0} z\frac{e^{1/(1-z)}}{z} = e^{\frac{1}{z-1}}\bigg|_{z=0} = e^{-1}.$$

Bemerkung 1 *Wie bekommt man die Partialbruchzerlegung in (a) und (d), wo wir einfache Pole haben. Die Residuen berechnen sich nach Formel (11) aus der Vorlesung zu*

$$(z-a)f(z)\bigg|_{z=a} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Das ist genau die SZuhaltemethodeßur Bestimmung der Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung. Genauer, es gilt

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{z-z_i}$$

mit $A_i = \operatorname{Res}_{z_i} f(z)/g(z)$.

Aufgabe 15.3.

$$f(z) = \frac{z(i+1)+1}{z^3 - ziz^2 - z} = \frac{z(i+1)+1}{z(z-i)^2}.$$

$z = 0$ ist eine einfache Nullstelle des Nenners, $z = i$ eine doppelte. Beide sind keine Nullstellen des Nenners. Wir folgern, dass f auf $B_1(-i)$ holomoroph ist. Der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet daher. Um den regulären Teil zu bestimmen, führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung durch:

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{(z-i)^2}$$

Wir berechnen $A = -1$, $C = 1$, sowie $B = 1$. Nun zur Laurententwicklung in $B_1(-i)$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z+i-i} + \frac{1}{z+i-2i} + \frac{1}{(z+i-2i)^2} \\
&= \frac{1}{i}\frac{1}{1-\frac{z+i}{i}} + \left(-\frac{1}{2i}\right)\frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}} + \left(-\frac{1}{2i})^2\right)\frac{1}{\left(1-\frac{z+i}{2i}\right)^2} \\
&= \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty} i^{-k}(z+i)^k - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(2i)^{-k}(z+i)^k - \frac{2i}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1-\frac{z+i}{zi}\right)^{-1} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1-\frac{z+i}{2i}\right)^{-1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}(2i)^{-k}(z+i)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k(2i)^{-k}(z+i)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(2i)^{-(k+1)}(z+i)^k.
\end{aligned}$$

Also ist für $|z+i| < 1$ die Laurentreihe gegeben durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[i^{-(k+1)} - \left(\frac{1}{2i}\right)^{k+1} - \frac{1}{4}(k+1)(2i)^{-k}\right](z+i)^k.$$

Jetzt zu $B_{2,\infty}(-i)$. Wir verwenden erneut die Partialbruchzerlegung von oben.

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-i} + \frac{1}{(z-i)^2} \\
&= -\frac{1}{z+i-i} + \frac{1}{z+i-2i} + \frac{1}{(z+i-2i)^2} \\
&= -\frac{1}{z+i}\frac{1}{1-i/(z+i)} + \frac{1}{z+i}\frac{1}{1-2i/(z+i)} + \frac{1}{(z+i)^2}\frac{1}{(1-2i/(z+i))^2}
\end{aligned}$$

Für den letzen Term nutzen wir wieder

$$\left(\frac{1}{1-\nu}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\nu^k, \quad |\nu| < 1$$

(siehe ÜA 11.5). Wir setzen $\nu = \frac{2i}{z+i}$. Damit gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[-i^k + (2i)^k \right] (z+i)^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(2i)^k (z+i)^{-(k+2)}$$
$$\underset{l=k+1 \text{ zweite Summe}}{=} \sum_{l=1}^{\infty} \left[-i^l + (2i)^l + l(2i)^{l-1} \right] (z+i)^{-(l+1)}.$$

Aufgabe 15.4. (a) Substition $z = e^{it}$, $\dot{z} = ie^{it} = iz$,

$$\int_0^{2\pi} \sin^n t \, \mathrm{d}t = \sum_{|z|=1} \frac{(z-1/z)^n}{(2i)^n} \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{(2i)^n i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^{n+1}} (z^2-1)^n \, \mathrm{d}z.$$

Setze $f(z) = \frac{(z^2-1)^k}{z^{k+1}}$. Wir haben eine Polstelle in $z = 0$. Um das Residuum zu berechnen, benötigen wir den Koeffizient von z^n in $(z^2-1)^n$. Zunächst gilt

$$\int_0^{2\pi} \sin^n t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2i)^n i} 2\pi i \operatorname*{Res}_0 f.$$

$$(z^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{2k} (-1)^{n-k}.$$

Im Falle n gerade gibt $k = n/2$ den Vorfaktor von z^n. Daraus folgt

$$\operatorname*{Res}_0 f = (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2}.$$

Im Falle n ungerade folgt $\mathrm{Res}_0 f = 0$. Wir schließen

$$\int_0^{2\pi} \sin^n t \, \mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{2\pi}{2^n} \binom{n}{n/2}, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Für das zweite Integral erhalten wir analog

$$\int_0^{2\pi} \cos^n t \, \mathrm{d}t = \int_{|z|=1} \left(\frac{z+1/z}{2} \right)^n \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{2\pi i}{2^n i} \operatorname*{Res}_0 f$$

mit $f(z) = \frac{1}{z}(z+1/z)^n = \frac{1}{z^{n+1}}(z^2+1)^n$. Analog ergibt sich

$$\operatorname*{Res}_0 f = \binom{n}{n/2}$$

im Falle das n gerade ist. Also

$$\int_0^{2\pi} \cos^n t \, \mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{2\pi}{2^n}\binom{n}{n/2}, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{z-1/z}{2i}} \frac{\mathrm{d}z}{iz} \\ &= \frac{2i}{i} \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{4iz+z^2-1} \\ &= 2 \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4iz-1} = 4\pi i \operatorname*{Res}_{z_1} f, \end{aligned}$$

wobei $f(z) = (z^2+4iz-1)^{-1}$ und

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{3}i - 2i, \\ z_2 &= -\sqrt{3}i - 2i \end{aligned}$$

die Polstellen erster Ordnung von f sind. Beachte, dass z_1 im Einheitskreis liegt, z_2 dagegen nicht.

$$\operatorname*{Res}_{z_1} f \overset{(11)\text{ Vorlesung}}{=} (z-z_1)\, f(z)\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}i}.$$

Daraus folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t} = \frac{4\pi i}{2\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(c) (siehe letzter Abschnitt in der Vorlesung)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} \, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_j} f,$$

wobei $\{z_j\}_{j=1}^N$ die Singularitäten in der oberen Halbebene bezeichne.

x^6+1 hat 6 Nullstellen auf dem Einheitskreis, davon liegen 3 in der oberen Halbebene.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} \, \mathrm{d}x = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{e^{i\pi/6}} f + \operatorname*{Res}_{i} f + \operatorname*{Res}_{e^{i5/6\pi}} f \right).$$

Die Nullstellen sind einfache Pole, d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^6+1\right]\Big|_{z=z_j} \neq 0$. Wir nehmen nun Formel (12) aus der Vorlesung und erhalten

$$\operatorname*{Res}_{z_j} f = \frac{1}{6z_j^5}.$$

Also
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \left(\frac{1}{6e^{i5/6\pi}} + \frac{1}{6i^5} + \frac{1}{6e^{i5/6\pi 5}} \right) = \frac{2}{3}\pi.$$

(d) Wir betrachten zunächst die Funktion im Integrand

$$f(z) = \frac{z}{z^4+1}$$

. Es gibt 4 rein-komplexe Nullstellen des Nenners, davon liegt eine im ersten Quadranten. Sei C_R der in der Abbildung dargestellte Weg, damit ist

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{e^{i\pi/4}} f \overset{(12)\ \text{Vorlesung}}{=} 2\pi i \frac{e^{i\pi/4}}{4e^{i3/4\pi}} = \pi/2.$$

Wir betrachten jetzt das Integral über den Viertelkreis.

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} \frac{Re^{i\varphi}}{R^4 e^{i4\varphi}+1} iRe^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{|R^4 e^{i4\varphi}+1|}\,\mathrm{d}\varphi \leq \int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{|R^4-1|}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{R^2}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir das Integral über die imaginäre Strecke. Mit der Parametrisierung $z = it$, $0 \leq t \leq R$ schreibt sich das Integral wie folgt:

$$\int_0^{iR} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{iti}{(it)^4+1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^R \frac{t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^R f(z)\,\mathrm{d}z.$$

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^R f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{V_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_0^{Ri} f(z)dz = \pi/2.$$

Also
$$2\int_0^R f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{V_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi/2$$

Der Grenzübergang $R \to \infty$ liefert

$$\int_0^\infty f(z)\,\mathrm{d}z = \pi/4.$$

Aufgabe 15.5. **(a)** Die Gleichung $e^z = z_0 = re^{i\varphi_0}$ hat die Lösungen

$$z_n = \ln r + i(\varphi_0 + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Also hat $e^{1/z} = z_0$ die Lösungen

$$z_n = \frac{1}{\ln r + i(\varphi_0 + 2\pi n)}.$$

Klar, $|z_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Damit folgt Behauptung (a).

(b) Wir betrachten die Folge $z_n = \frac{1}{i\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$e^{1/z_n} = e^{i\pi n} = (-1)^n \Longrightarrow \left| e^{1/z_n} \right| = 1$$

Die Folge $\left\{ e^{1/z_n} \right\}_n$ is aber nicht konvergent.

Bemerkung 2 *Interessanter wäre es eigentlich, die Funktion $f(z) = e^{1/z^2}$ zu betrachten. Auf der reellen Achse gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ nicht. Im Komplexen können wir aber die Folge*

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} n e^{i\pi/4}} \longrightarrow 0$$

betrachten, für die gilt

$$e^{1/z_n^2} = (-1)^{n^2}.$$

Also gilt $\left| e^{1/z_n^2} \right| = 1$, aber $\left\{ e^{1/z_n^{n^2}} \right\}_n$ konvergiert nicht.