Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Vorlesung 01.02.2013

Satz 16 *(Residuensatz) Sei f holomorph in $G := \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_N\}$ und $\gamma \subset G$ ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)d\xi = \sum_{j=1}^{N} n(\gamma, z_j) \cdot \operatorname*{Res}_{z_j} f\,.$$

Beweis. f besitzt in jedem Punkt z_k eine Laurententwicklung

$$f(z) = \underbrace{\sum_{j=-\infty}^{-1} a_{k,j}(z-z_k)^j}_{=:f_k(z)} + \sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j}(z-z_k)^j\,.$$

Die Laurentreihen konvergiern in $B_{0,\delta}(z_k)$ mit $\delta := \min\limits_{\ell \neq k} |z_\ell - z_k|$. Die Hauptteile konvergieren allerdings in $B_{0,\infty}(z_k)$ (siehe Satz 14). Wir betrachten jetzt die Funktion

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{N} f_k(z)\,.$$

Die Funktion g bleibt beschränkt in kleinen Umgebungen $U(z_k)$, $k = 1, ..., N$. In einer Umgebung des Punktes z_k ist der Hauptteil f_k dann nicht mehr vorhanden. Nach Satz 15 handelt es sich bei den Punkten z_k, $k = 1, ..., N$, um hebbare Singularitäten von g. Geeignete stetige Fortsetzungen in diesen Punkten garantieren damit die Holomorphie der fortgesetzten Funktion, die wir auch mit g bezeichnen.
Mit Hilfe des Cauchy-Integralsatzes (Satz 6) folgern wir

$$0 = \int_\gamma g(\xi)\,d\xi = \int_\gamma f(\xi) - \sum_{k=1}^{N} f_k(\xi)\,d\xi = \int_\gamma f(\xi)\,d\xi - \sum_{k=1}^{N}\int_\gamma f_k(\xi)\,d\xi$$

und damit

$$\int_\gamma f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{N}\int_\gamma f_k(\xi)\,d\xi\,.$$

Setzen wir für $f_k(z)$ den entsprechenden Teil der Laurent-Entwicklung ein, erhalten wir

$$\int_\gamma f_k(\xi)\,d\xi = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_{k,j} \int_\gamma (\xi - z_k)^j \,d\xi\,.$$

Die Integrale auf der rechten Seite verschwinden für $j \neq -1$, da dann $\frac{(\xi-z_k)^{j+1}}{j+1}$ eine Stammfunktion des Integranden darstellt (siehe auch ÜA 12.5). Es bleibt also

$$\int_\gamma f_k(\xi)\,d\xi = a_{k,-1} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z_k}\,d\xi = \operatorname*{Res}_{z_k} f \cdot 2\pi i \cdot n(\gamma, z_k)\,.$$

Im letzten Schritt wurde Lemma 12 und die nachfolgende Definition benutzt. Schließlich erhalten wir

$$\int_\gamma f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{N} \int_\gamma f_k(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} n(\gamma, z_k) \operatorname*{Res}_{z_k} f\,.$$

■.

Methoden der Residuenberechnung

Das Residuum ist definiert also der Koeffizient mit Index $j = -1$ in der Laurent-Darstellung, d.h.,

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = a_{-1}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} f(\xi)\,d\xi\,.$$

Wie kann man dieses Residuum praktisch effizient berechnen? Wir diskutieren im folgenden drei Methoden.

1. Das Residuum aus der Laurent-Entwicklung ablesen.
   Beispiel: $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$. Die Taylorreihe für e^z liefert

   $$f(z) = e^{\frac{1}{1-z}} = 1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \ldots$$

   Der Punkt $z = 1$ is eine wesenliche Singularität. Das Residuum ist der Koeffizient vor $\frac{1}{z-1}$, also

   $$\operatorname*{Res}_{1} f = -1\,.$$

2. Das Residuum in einem einfachen Pol $z = a$. Hier gilt die allgemeine Formel

   $$\boxed{\operatorname*{Res}_{a} f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)}\,. \tag{11}$$

Beweis. In einen Pol erster Ordnung hat die Laurent-Reihe die Gestalt

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

und damit

$$(z-a)f(z) = a_{-1} + (z-a)a_0 + (z-a)^2 a_1 + \ldots$$

Also ist $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = a_{-1}$. ■

Beispiel: Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ hat die einfachen Pole: $z_0 = 0$ und $z_1 = 1$. Wir sehen mit (11) sofort

$$\operatorname*{Res}_0 f = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z-1} = -1$$

und

$$\operatorname*{Res}_1 f = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z} = 1\,.$$

Sonderfall: Wir betrachten die Funktion $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit holomorphen Funktionen g und h, wobei h in $z = a$ eine einfache Nullstelle hat, d.h. $h(a) = 0$ und $h'(a) \neq 0$. Dann gilt

$$\boxed{\operatorname*{Res}_a \tfrac{g}{h} = \tfrac{g(a)}{h'(a)}, \text{ wenn } h(a) = 0, h'(a) \neq 0}\,. \tag{12}$$

Beweis. Wir wenden (11) an und schreiben

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)}{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

■

Beispiel: Die Funktion $f(z) = \frac{3z^2+1}{z^4-1}$ hat einfache Pole bei $z = +1, -1$ und $z = +i, -1$. Mit Hilfe von (11) oder (12) gilt

$$\operatorname*{Res}_1 f = 1, \operatorname*{Res}_{-1} f = -1, \operatorname*{Res}_i f = \frac{-2}{4i^3} = -\frac{i}{2}, \operatorname*{Res}_{-i} f = \frac{-2}{-4i^3} = \frac{i}{2}\,.$$

Mit dem Residuensatz (Satz 16) würde also in der Situation (siehe Bild)

$$\int_\gamma f(\xi)\,d\xi = 2\pi i(\operatorname*{Res}_i f + \operatorname*{Res}_1 f) = \pi + 2\pi i\,.$$

gelten.

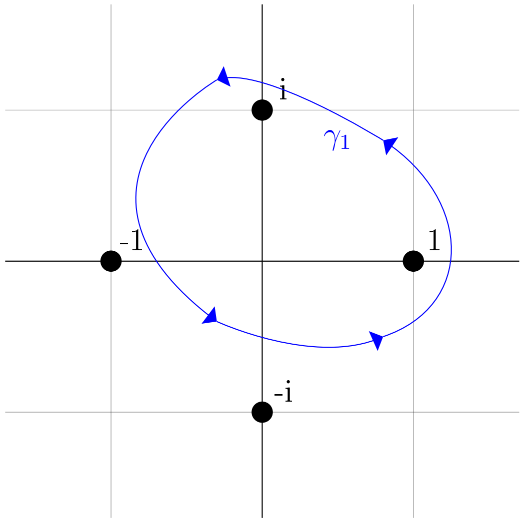

Abbildung 1: Kartoffel

Beispiel: $f(z) = \frac{e^{iz}+1}{\cos(z)}$. Die Funktion $\cos(z)$ im Nenner hat die einfachen Nullstellen $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Mit (12) erhalten wir sofort für $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname*{Res}_{z_k} f = \frac{e^{i(2k+1)\frac{\pi}{2}}+1}{-(-1)^k} = \frac{i(-1)^k+1}{(-1)^{k+1}} = (-1)^{k+1} - i\,.$$

3. Das Residuum in einem m-fachen Pol $z = a$. Hier gilt die Formel

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{a} f = \tfrac{1}{(m-1)!}\left(\tfrac{d}{dz}\right)^{m-1}\Big[(z-a)^m f(z)\Big]_{z=a}}\,. \tag{13}$$

Beweis. Die Laurentreihe in $z = a$ hat die Gestalt (m-facher Pol)

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + ...$$

Also (analog zu 2.),

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + (z-a)a_{-m+1} + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + ...$$

Dies stellt eine gewöhnliche Potenzreihe dar und es gilt

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}\Big[(z-a)^m f(z)\Big]_{z=a},$$

siehe Satz 8, bzw Abschnitt II.4.1. ■

Bemerkung: Natürlich ist (13) ein Spezialfall von (11) für $m = 1$.

Beispiel: $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$. f hat bei $z=1$ einen 3-fachen Pol. Mit (13) folgt

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_1 f &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\Big[\frac{z^2}{z+1}\Big]_{z=1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\Big[\frac{2z(z+1)-z^2}{(z+1)^2}\Big]_{z=1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\Big[\frac{z^2+2z}{(z+1)^2}\Big]_{z=1} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{(2z+2)(z+1)^2-2(z+1)(z^2+2z)}{(z+1)^4}\Big]_{z=1} = \frac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

Beispiele zum Residuensatz

1. Wir betrachten das Integral
$$I = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz\,.$$
Dieses Integral könnte man auch leicht mit der Cauchy-Integralformel für Ableitungen berechnen (siehe Satz 8). Wir wollen den Residuensatz (Satz 16) verwenden. In $z=0$ gibt es einen 4-fachen Pol, denn die Laurententwicklung des Integranden in $z=0$ lautet
$$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!} + ...$$
Man sieht direkt (oder man nimmt Formel (13))
$$\operatorname*{Res}_0 f = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}\,.$$
Mit Satz 16 folgt
$$I = \frac{2\pi i}{6} = \frac{\pi}{3}i\,.$$

2. Wir betrachten
$$I = \int_{|z-1|=\sqrt{3}} \frac{z^3+1}{(z^2-1)^3(z^2+1)^2}\,dz\,.$$
1. Schritt: Wir kürzen den Integranden zu
$$f(z) = \frac{z^2-z+1}{(z-1)^3(z+1)^2(z^2+1)^2}\,.$$
Man überzeugt sich leicht, dass nur die Singularitäten $z=i$ (zweifacher Pol), $z=-i$ (zweifacher Pol) und $z=1$ (3-facher Pol) von der Kurve (Kreislinie) umlaufen werden, also gilt (Satz 16)
$$I = 2\pi i(\operatorname*{Res}_i f + \operatorname*{Res}_{-i} f + \operatorname*{Res}_1 f) = \frac{15}{32}\pi i\,.$$

In der Tat erhält man mit Hilfe von (13)

$$\operatorname*{Res}_{i} f = \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\Big[\frac{z^2-z+1}{(z-1)^3(z+1)^2(z+i)^2}\Big]_{z=i} = \frac{1+4i}{32}\,.$$

Analog erhält man $\operatorname*{Res}_{-i} f = \frac{1-4i}{32}$ und $\operatorname*{Res}_{1} f = \frac{11}{64}$.

Bemerkung: In den letzten beiden Beispielen spielt die Tatsache, dass über einen Kreisrand integriert wird, keine Rolle. Entscheidend ist: Welche Singularitäten werden (wie oft) umlaufen und wie groß sind die entsprechenden Residuen.

Berechnung reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes

A. Integrale vom Typ $\int_0^{2\pi} R(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\, d\varphi$ mit einer rationalen Funktion $R(\cdot,\cdot)$. Wir schreiben das Integral als Kurvenintegrale entlang der Einheitskreislinie. Diese ist parametrisiert durch $z(\varphi) = e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Das ergibt $\dot{z}(\varphi) = ie^{i\varphi} = iz(\varphi)$. Außerdem ist

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \text{ und } \sin(\varphi) = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\,.$$

Damit sieht man leicht die Identität

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\varphi), \sin(\varphi))\, d\varphi = \int_{|z|=1} R\Big(\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)\Big)\frac{dz}{iz}\,.$$

Wenn man es von "rechts nach links" liest, ist die Identität sofort klar. Das letzte Integral wird mit dem Residuensatz (Satz 16) ausgewertet, vorausgesetzt, dass $R(\cdot,\cdot)$ keine Singularitäten auf dem Einheitskreis besitzt.

Auch möglich: Integrale vom Typ

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos(\varphi), \sin(\varphi), \cos(2\varphi), \sin(2\varphi), ..., \sin(n\varphi))\, d\varphi\,.$$

Beispiel: Sei $0 < \varepsilon < 1$.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\varepsilon\cos(t)} = \frac{2}{i\varepsilon}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1}\,.$$

Wir setzen $f(z) = \frac{1}{z^2+\frac{2}{\varepsilon}z+1}$. Die Nullstellen des Nenners sind

$$z_{1,2} = -\frac{1}{\varepsilon} \pm \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Davon liegt nur $z_1 = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2}$ im Einheitskreis ($0 < \varepsilon < 1$). Das ist ein einfacher Pol. Das Residuum ist, siehe (11),

$$\operatorname*{Res}_{z_1} f = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{1}{z_1 - z_2} = \left(\frac{2}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \,.$$

Die Integralberechnung mit Hilfe des Residuensatzes liefert dann

$$I = 2\pi i \frac{2}{\varepsilon i} \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \,.$$

B. Integrale vom Typ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ (mit geeignetem Integranden $f(x)$). Diese Integrale werden als Umlaufintegral $I_R = \int_{C_R} f(z)\,dz$ behandelt:

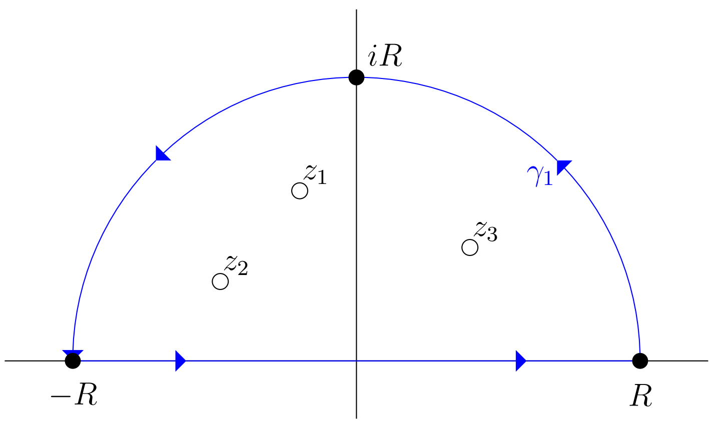

Abbildung 2: Oberer Halbkreis.

Wichtig: $f(x)$ hat keine Singularität auf der reellen Achse! Wähle R so groß, dass alle Singularitäten von $f(z)$, die in der oberen Halbebene liegen, eingeschlossen werden. Dann gilt

$$\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_j} f \,.$$

Unter der Annahme, dass das Integral entlang des Halbkreises H_R verschwindet, erhält man im Grenzübergang

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_j} f \,,$$

wobei $\{z_1, ..., z_N\}$ die Singularitäten in der oberen Halbebene sind.

Beispiel: Übungsaufgabe 13.3. Wir rufen uns kurz die Fouriertransformation in Erinnerung,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega}\,\mathrm{d}x.$$

Betrachten jetzt die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix\omega}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Funktion $f(z) = \frac{e^{-iz\omega}}{1+z^2}$ ist für alle $\omega \in \mathbb{R}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Wir betrachten den Weg C_R für $R \to \infty$ und erhalten zunächst

$$\int_{C_R} f(z) e^{-i\omega z} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_i \left[f(z)e^{-i\omega z}\right] = 2\pi i \operatorname*{Res}_i \left[\frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}\right] \underset{(12)}{=} 2\pi i \frac{e^{\omega}}{2i} = \pi e^{\omega}$$

Der Beitrag entlang des Halbkreises geht gegen Null für $R \to \infty$. In der Tat, für $\omega \leq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{H_R} \ldots dz &= \int_0^{\pi} \frac{e^{-i\omega R e^{i\varphi}}}{1+R^2 e^{i2\varphi}} iRe^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\pi} \frac{e^{-iR\omega\cos\varphi + R\omega\sin\varphi}}{1+R^2e^{i2\varphi}} iRe^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ \Longrightarrow \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi}) iRe^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right| &\leq \int_0^{\pi} \left|\frac{R}{1+R^2e^{i2\varphi}}\right| \underbrace{e^{R\omega\sin\varphi}}_{\leq 1,\ \text{da}\ \omega\leq 0}\,\mathrm{d}\varphi \\ &\leq \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \frac{R}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\omega}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname*{Res}_i \left[f(z)e^{-i\omega z}\right] = \pi e^{w}\,.$$

Und schließlich

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\omega}}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi e^{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\omega}, \quad \omega \leq 0.$$

Da f eine gerade Funktion ist, ist sofort klar, dass $\hat{f}(\omega) = \hat{f}(-\omega)$. Folglich erhalten wir als Endergebnis

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}.$$

Vgl. Aufgabe 9.1.

Beispiel: Eine analoge Argumentation kann man im Falle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen

P, Q anwenden, bei denen der Grad von Q mindestens um 2 grö0er ist als der Grad von P. Das bewirkt auch hier

$$\int_{H_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_j} f\,,$$

wobei $\{z_1, ..., z_N\}$ die Singularitäten (Nullstellen von Q) in der oberen Halbebene (Im > 0) sind.

THE END