Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungen zu Kapitel I

Aufgabe 1. Man berechne

(a) $\operatorname{grad}\Phi$ für $\Phi(x,y) = y\int_0^{\log x} e^{-t}\cos t dt$,

(b) $\operatorname{rot}\mathcal{F}$ für $\mathcal{F}(x,y,z) = (xy, x^2z, y)$,

(c) $\operatorname{div}\mathcal{F}$ für $\mathcal{F}(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$,

(d) $\operatorname{rot}\mathcal{F}$ für $\mathcal{F}(x,y,z) = (z, x, y)$,

(e) $\operatorname{div}\mathcal{F}$ für $\mathcal{F}(x,y,z) = \left(\int_0^{xyz} g(t)dt, y^y, x^z\right)$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Fourierreihen der Funktionen $f(x) = \cos^3 x$ und $g(x) = \sin^3 x$ auf $(-\pi, \pi)$.

Aufgabe 3. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h}, & 0 \le x \le h \\ 0, & h < x \le \pi \end{cases}$$

in $[0,\pi]$ in eine Kosinusreihe.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = e^{-x}\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5. Lösen Sie das innere Dirichlet-Problem für eine Funktion $u(x,y)$ im Halbkreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2, x < 0\}$ mit $R > 0$, das gegeben ist durch

$$\Delta u = 0, \quad u(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = R^2\cos 2\varphi,\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}, \quad u(0,y) = -y^2,\ -R \le y \le R.$$

Geben Sie die Lösung in der Form $u(x, y)$ an.

Aufgabe 6. Lösen Sie mittels Separationsansatz das Wärmeleitungsproblem des endlichen, an beiden Enden isolierten Stabes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1/2 - |x - 1/2|, \quad 0 < x < 1,\ t > 0.$$

Hinweis: Die Isolierung bewirkt, dass der Wärmegradient (bzgl. x) an den Enden zu jedem Zeitpunkt t verschwindet.

Aufgabe 7. Sei $u(x, y)$ die harmonische Funktion im Kreis $K_R(0)$, $R > 0$, die durch ihre Randwerte

$$u(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta) = 1 + 5\cos^8\vartheta,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

definiert ist. Bestimmen Sie $\max_{(x,y)\in K_R(0)} u(x, y)$ und $\min_{(x,y)\in K_R(0)} u(x, y)$ und den Funktionswert in 0.

Aufgabe 8. Man löse das innere Dirichlet-Problem $\Delta u = 0$ in dem Rechteck $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$, wobei folgende Randwerte gegeben sind

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 2\pi), \quad u(0, y) = 0, \quad y \in (0, \pi) \\ &u(x, \pi) = 0, \quad x \in (0, 2\pi), \quad u(2\pi, y) = \sin(2y), \quad y \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1, & \frac{1}{e^2} \le x^2 + y^2 &< 1, \\ u(x, y) &= 2 + \frac{1}{e^2}, & x^2 + y^2 &= \frac{1}{e^2}, \\ u(x, y) &= 2, & x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$