Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 1.

Abgabe am **23.10.2012**.

Aufgabe 1. (Divergenztheorem, Nabla-Kalkül)

Sei Ω ein dreidimensionales, einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einer rektifizierbaren Oberfläche Γ begrenzt ist. Stelle $\vec{u}$ ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$ dar. Dann gilt

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u}\, dV \quad = \quad \iint\limits_{\Gamma} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dF \quad \text{(Divergenztheorem)}, \tag{1}$$

wobei $\vec{n}$ der auf eins normierte Vektor in Richtung der äußeren Normalen von Γ ist.

a) Man werte mit Hilfe des Divergenztheorems die folgenden Integrale aus:

$$\iint\limits_{\Gamma} (x\, dy\, dz \;+\; y\, dz\, dx \;+\; z\, dx\, dy) \quad , \qquad \Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$\iint\limits_{\Gamma} (x^2\, dy\, dz \;+\; y^2\, dz\, dx \;+\; z^2\, dx\, dy) \quad , \qquad \Gamma : \text{Oberfläche, die } 0 \leq x, y, x \leq a \text{ begrenzt.}$$

b) Man zeige

$$\iint\limits_{\Gamma} (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot d\vec{F} \quad = \quad 0$$

$$\iint\limits_{\Gamma} (f \nabla g \;-\; g \nabla f) \cdot d\vec{F} \quad = \quad \iint\limits_{\Gamma} (f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} \;-\; g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}})\, dF$$

c) Sei $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Man schreibe rot $(\vec{v} \times \vec{w})$, sowie rot rot $\vec{v}$ nur unter Verwendung von grad, div und +, -.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Typ einer Differentialgleichung)

Untersuchen Sie zu

$$u \colon \mathbb{R}^3 \times T \to \mathbb{R},$$
$$(x, t) \mapsto u(x, t)$$

und $\varepsilon > 0$, welche der folgenden partiellen Differentialgleichungen elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind:

$$\Delta u = c^2 \cdot u_{tt}, \tag{2}$$
$$\varepsilon u_t - \Delta u + au = f, \tag{3}$$
$$u_t - \Delta u + \varepsilon u_x - u_y = f, \tag{4}$$
$$-\Delta u + t(1 - \|x\|_2^2)u = f. \tag{5}$$

Dabei bezeichne $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ den Laplace-Operator im Ort.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. Eine kreisförmige Membran mit Radius 1 werde am Rand fest eingespannt. Die Berechnung der Eigenfunktionen der Membran, aus deren Überlagerung sich die Form nach einer Anregung ergibt, führt auf ein Eigenwertproblem für die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = -\lambda u \tag{6}$$

mit den homogenen Dirichlet Randwerten $u_{|\Gamma} = 0$.

a) Man zeige, dass bei Verwendung von Polarkoordinaten Gleichung (6) in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\lambda u \tag{7}$$

übergeht.

b) Mit Hilfe des Separationsansatzes

$$u(\theta, r) = A(\theta)B(r)$$

leite man gewöhnliche Differentialgleichungen für A und B her.

c) Für eine radial-symmetrische Lösung, d.h. $A = const$, bestimme man über einen Potenzreihenansatz

$$B(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$$

die ersten 4 Glieder in Abhängigkeit von λ. Man benutze das Ergebnis zur Berechnung einer Näherung von λ.

(5 Punkte)