



Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel



Übungsblatt 11.

Abgabe am **15.01.2013**.

Häufig müssen für die Lösung eines Finite-Elemente-Problems numerische Quadratur-Verfahren eingesetzt werden. Die Auswirkung des hierdurch eingeführten zusätzlichen Fehlers auf die Gesamtlösung untersuchen wir in der Vorlesung im Rahmen der Behandlung der Lemmata von Strang. Auf diesem Übungszettel wollen wir uns noch einmal mit den Quadraturverfahren selbst beschäftigen und einige ihrer Eigenschaften wiederholen.

Aufgabe 29. Seien $S := \text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}[2]$, $K : C(S) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 < t_0 < t_1 < 1$ definiert durch

$$K(f) := \frac{1}{6} \left(f(t_0, t_0) + f(t_1, t_0) + f(t_0, t_1) \right)$$

und $\Pi_2^2 := \{(x, y) \mapsto \sum_{0 \leq i+j \leq 2} a_{ij} x^i y^j \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}$. Zeige:

$$K(p) = \iint_S p(x, y) dx dy \quad \text{für alle } p \in \Pi_2^2 \iff t_0 = 1/6 \text{ und } t_1 = 2/3.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 30. (Transformationsformel für Vierecke)

Seien $T \subset \mathbb{R}^2$ und $T_{ref} \subset \mathbb{R}^2$ Vierecke mit den Eckpunkten $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}^2$ und $y_1 = (0, 0)$, $y_2 = (1, 0)$, $y_3 = (0, 1)$, $y_4 = (1, 1)$. Bestimmen Sie eine affin-lineare Transformation $\Phi : T_{ref} \rightarrow T$ mit $\Phi(y_i) = z_i$ für $i = 1, \dots, 4$, berechnen Sie die Gram'sche Determinante $\sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)}$ und verifizieren Sie die Transformationsformel $\int_T \varphi(x) dx = 2|T| \int_{T_{ref}} \varphi(\Phi(y)) dy$.

(5 Punkte)

Aufgabe 31. (Verfahrensfehler der Produkt-Trapezregel auf Vierecken)

Schätzen Sie den Quadraturfehler $E_h(f)$ für das Integral

$$\int_Q f(\vec{x}) d\vec{x}$$

mit Q dem Einheitsquadrat und $f \in C^2(Q)$ bei numerischer Quadratur mit der Produkt-Trapezregel ab. Es sollen dabei nur die Eckpunkte als Stützstellen verwendet werden.

(5 Punkte)