Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **22.01.2013**.

Aufgabe 32. (Algebraische Eigenschaften adjungierter Operatoren)
Zeigen Sie für X, Y, Z Banachräume

a) $(\alpha T_1 + T_2)' = \alpha T_1' + T_2', \quad T_1, T_2 \in L(X;Y), \alpha \in \mathbb{K}$

b) $I' = I$

c) $(T_2 T_1)' = T_1' T_2', \quad T_1 \in L(X;Y),\ T_2 \in L(Y;Z)$

d) $T'' J_X = J_Y T$, $T \in L(X;Y)$, mit $J_X : X \to X''$, $J_Y : Y \to Y''$ und $\langle x', J_X x\rangle := \langle x, x'\rangle$ sowie $\langle y', J_Y y\rangle := \langle y, y'\rangle$

(5 Punkte)

Aufgabe 33. Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear. Zeigen Sie

a) T surjektiv $\to$ T' injektiv

b) T' surjektiv $\to$ T injektiv

(5 Punkte)

Aufgabe 34. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv semidefinit. Sei $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \leq n$, $l \in \mathbb{R}^n$ und $g \in Im(B)$. Sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein Minimierer von

$$\min_{u\in\mathbb{R}^n : Bu = g} \frac{1}{2} u^T A u - l^T u.$$

Zeigen Sie:

a) Es existiert ein Lagrangemultiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^m$, so dass folgendes LGS erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ g \end{pmatrix}.$$

b) Falls A symm. pos. def. auf $Ker(B)$, dann ist der Minimierer u eindeutig.

(5 Punkte)