Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 2.

Abgabe am **30.10.2012**.

Aufgabe 4. (Elementare Physik)

a) Wir betrachten ein Fahrzeug mit Querschnittsfläche A, das sich mit Geschwindigkeit v durch eine Medium der Dichte ρ bewegt.
Bestimmen Sie durch Untersuchung der Einheiten, wie die Widerstandskraft von diesen drei Größen abhängt.

b) Die Formel soll nun hergeleitet werden. Nahmen Sie dazu an, dass das Fahrzeug das Medium, das in einer Zeit δt verdrängt wird, von 0 auf v beschleunigt.

c) Welche Leistung braucht man, um ein U-Boot mit $10m^2$ Querschnitt mit $20km/h$ durch Wasser zu bewegen? Wievielen $100W$-Glühbirnen entspricht das?

(5 Punkte)

Aufgabe 5. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt, $\delta\Omega$ in C^1, $\mathbf{T} : \Omega \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ein Tensor, $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $v_i \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\vec{\nu}$ der nach außen zeigende Normalenvektor entlang $\delta\Omega$. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega \mathbf{T} : \nabla v dx = -\int_\Omega v \cdot (\nabla \cdot T) + \int_{\delta\Omega} v \cdot T\vec{\nu} dS$$

Aufgabe 6. (Erhaltung und Charakteristiken)

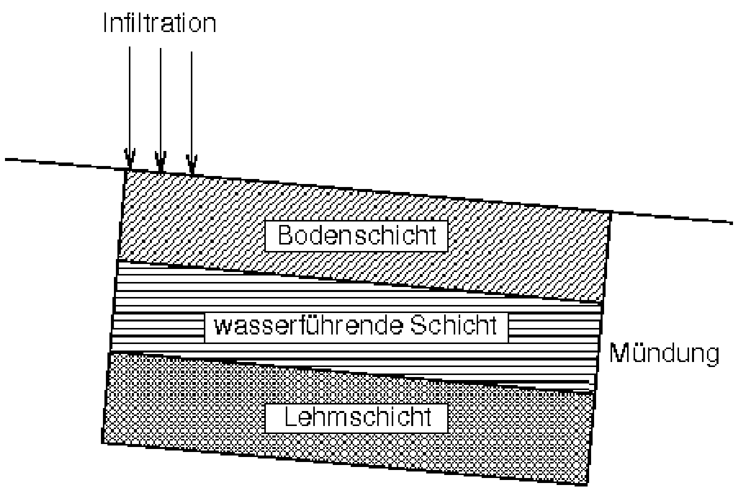

Abbildung 1: Grundwasserinfiltration.

Bei exzessiver Düngung in der Landwirtschaft kann Phosphat durch Regen oder Bewässerung in grundwasserführende Schichten im Boden gelangen. Grundwasser fließt i.A. langsam, seine Geschwindigkeit (definiert als Wasservolumen, das eine Einheitsfläche in einer

Einheitszeitspanne durchquert) ist in der Ordnung einige Meter im Monat. Wir nehmen folgendes an: Die Grundwasserströmung sei eindimensional und uniform, das Phosphat wird im Grundwasser passiv ohne Diffusion mittransportiert, Phosphat wird nicht durch Bodenpartikel absorbiert. Die Phosphatkonzentration $c(x,t)$ des Grundwassers wird in $[kg/m^3]$ gemessen. Nun wird am Ort $x = 0$ für $t > 0$ eine gegebene Menge Q $[kg/(m^2 \cdot s)]$ von Phosphat pro Einheitsfläche pro Einheitszeit ins Grundwasser eingetragen, vgl Abb. 1. Man zeige, daß die Erhaltung des Phosphats der Gleichung

$$c_t(x,t) + uc_x(x,t) = 0, \quad x > 0$$

entspricht, wobei u die Fließgeschwindigkeit des Grundwassers bezeichnet, und daß die oben erwähnten Bedingungen zu

$$c(0,t) = Q/u, \quad c(x,0) = 0$$

führen.

Programmieraufgabe 1. Wir wollen für $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ das Poisson-Problem

$$-u''(x) = \sin(2\pi x)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

lösen. Nach Diskretisierung mit N Punkten kann man dieses als lineares Gleichungssystem

$$\left(\frac{1}{N-1}\right)^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(\frac{1}{N-1}) \\ u(\frac{2}{N-1}) \\ \vdots \\ u(\frac{N-2}{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\pi(\frac{1}{N-1})) \\ \sin(2\pi(\frac{1}{N-1})) \\ \vdots \\ \sin(2\pi(\frac{N-2}{N-1})) \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei die $u(\frac{1}{N-1}), u(\frac{2}{N-1}), \dots u(\frac{N-2}{N-1})$ die näherungsweise Lösung darstellen.

a) Machen Sie sich mit der BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) Library vertraut. Im CIP-Pool ist die GotoBLAS2 installiert, die als Kompiler-Optionen `-Wl,-rpath,/opt64/packages/GotoBLAS2 -L/opt64/packages/GotoBLAS2 -lgoto2` benötigt. Nutzen Sie das hierin bereitgestellte Matrix-Vektor-Produkt für symmetrische Bandmatrizen sowie das Skalarprodukt aus der BLAS, um den CG (Konjugierte Gradienten) - Algorithmus zur iterativen Lösung des obigen Gleichungssystemes zu implementieren. (Sollte Ihnen dieser nicht aus einer Vorlesung bekannt sein, machen Sie sich kurz damit vertraut.)

b) Machen Sie sich nun mit Lapack, einer Library mit direkten Lösern vertraut. Lösen hiermit ebenfalls das obige lineare Gleichungssystem. Dabei soll der Löser für tridiagonale Gleichungssysteme zum Einsaty kommen. Lapack wird ebenfalls durch die GotoBLAS2-Implementierung bereitgestellt und benötigt die selben Kompilerparameter.

c) Die exakte Lösung für das dargestellte Poissonproblem ist $u = \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi x)$. Werten Sie diese auf den selben Punkten aus, wie die näherungsweise Lösung. Plotten Sie nun die Fehler (in der Maximumsnorm) für steigende Anzahlen an CG-Iterationen sowie den Fehler des direkten Lösers in ein Diagramm. Was können sie über den Fehlerabfall des CG-Verfahrens gegenüber dem direkten Löser sagen.

(10 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt wie mit den Tutorinnen abgesprochen in der Woche vom 05. bis 09.11.2012.