Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **05.11.2012**.

Aufgabe 7. (Entdimensionalisierung)

Es seien die dimensionsbehafteten Navier-Stokes-Gleichungen mit

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p\,,$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Größen gegeben:

- Ort $\vec{x} \in \Omega$ $[m]$
- Zeit $t \in [0, T]$ $[s]$
- Geschwindigkeit $\vec{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^3$ $\left[\frac{m}{s}\right]$
- Druck $p : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ $[Pa] = \left[\frac{kg}{m \cdot s^2}\right]$
- Dichte $\rho \in \mathbb{R}$ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
- dynamische Viskosität $\mu \in \mathbb{R}$ $\left[\frac{kg}{m \cdot s}\right]$

Führen Sie die dimensionslosen Variablen

$$\vec{x}^* := \frac{\vec{x}}{L}, \quad t^* := \frac{u_\infty t}{L}, \quad \vec{u}^* := \frac{\vec{u}}{u_\infty}, \quad p^* := \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2}$$

ein, mit $L \in \mathbb{R}$ einer Referenzlänge, $u_\infty \in \mathbb{R}$ einer (skalaren) Referenzgeschwindigkeit, $p_\infty \in \mathbb{R}$ einem Referenzdruck und ρ_∞ einer Referenzdichte. Überführen Sie damit die Navier-Stokes-Gleichungen in ihre dimensionslose Form.
Im Übrigen ist

$$Re := \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu}$$

die Reynoldszahl.

(7.5 Punkte)

Aufgabe 8. (Nabla-Kalkül)

Die skalaren Funktionen $\psi, \phi, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien hinreichend oft differenzierbar. Zeigen Sie nachfolgende Aussagen:

a) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0$

b) $\operatorname{rot}\nabla f = 0$

c) $\mathrm{div}\nabla f = \Delta f$

d) $\mathrm{div}(\psi \nabla \phi) = \psi \Delta \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$

e) $\nabla \cdot (\nabla \vec{u} + \{\nabla \vec{u}\}^T) = \Delta \vec{u} + \nabla(\nabla \cdot \vec{u})$

(7.5 Punkte)