Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 6.

Abgabe am **13.11.2012**.

Definition 1 (Die Sobolev-Räume $H^{m,p}$)**.** Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$ besteht der Raum $H^{m,p}(\Omega)$ aus allen Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, die m-mal schwach differenzierbar sind mit Ableitungen im Raum $L^p(\Omega)$. Die Räume $H^{m,p}(\Omega)$ werden mit den Sobolev-Normen

$$||u||_{m,p;\Omega} = ||u||_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_p^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$||u||_{m,\infty;\Omega} = ||u||_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_\infty,$$

versehen.

Aufgabe 15. Sei Ω beschränkt. Zeigen Sie: $H^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$.
Tipp: Auf einem beschränkten Gebiet Ω und für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gehört jedes $u \in L^q(\Omega)$ auch zum Raum $L^p(\Omega)$.

(5 Punkte)

Definition 2 (Dualraum V')**.** Der Dualraum V' eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraumes V ist der Raum der linearen beschränkten Funktionale, d.h.

$$V' = \mathcal{L}(V; \mathbb{K}).$$

($\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W | T \text{ linear und stetig}\}, ||T|| < \infty$)

Satz 1 (Projektionssatz)**.** Sei V ein Hilbertraum und $A \subset V$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es genau eine Abbildung $P : V \to A$ mit

$$||x - P(x)||_V = \operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} ||x - y||_V \quad \forall x \in V.$$

Eine äquivalente Charakterisierung von $P(x)$ ist

$$Re\langle x - P(x), a - P(x)\rangle_V \leq 0 \quad \forall a \in A.$$

Aufgabe 16. (Riesz'scher Darstellungssatz)

Zeigen Sie mit Hilfe des Projektionssatzes, den Riesz'schen Darstellungssatz:
Ist V ein Hilbertraum, so ist durch

$$J(x)(y) := \langle y, x\rangle_V \quad \forall x, y \in V$$

ein isometrischer konjugierter linearer Isomorphismus $J : V \to V'$ definiert. (Konjugiert linear bedeutet $J(\alpha x + y) = \overline{\alpha} J(x) + J(y)$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$.)

(5 Punkte)

Aufgabe 17. (Finite Elemente)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$-u''(x) = f \text{ in } \Omega = [0,1] \quad \text{mit} \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sei.

a) Geben Sie die schwache Formulierung des Randwertproblems an.

b) Das Randwertproblem werde nun durch eine endliche Finite Element Basis $\{\lambda_i\}, i = 1, \ldots, n$ diskretisiert, d.h. $u_h = \sum_{i=1}^n u_i \lambda_i$. Geben Sie das auf diese Weise entstehende lineare Gleichungssystem an.

Programmieraufgabe 3. (Finite Elemente)

Wir wollen das Poisson-Problem

$$-\Delta u = 1 \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \tag{2}$$

auf dem Gebiet $\Omega = (0,1)^2$ mit der Finite Elemente - Methode lösen. Dazu werde Ω zunächst in N^2 Quadrate der Kantenlänge $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ zerlegt. Dann wird jedes der Quadrate in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt, wobei die Quadrate stets durch die Verbindung der unteren linken Ecke zur oberen rechten Ecke aufgespalten werden. Die Gitterpunkte bilden den diskreten Raum Ω_h. Es sollen die in der Vorlesung eingeführten linearen Elemente verwendet werden.

a) Geben Sie die schwache Formulierung für obiges Problem an.

b) Berechnen Sie auf dem Papier die Matrix-Einträge für die Steifigkeitsmatrix für lineare Elemente.

c) Implementieren Sie die Matrix-Vektor-Operation, die die Steifigkeitsmatrix (ohne Aufstellen der vollen Matrix) auf einen Vektor anwendet. Die darin verwendete Schleife soll über die Elemente laufen und darin jeweils die Freiheitsgrade aufsummieren.

d) Berechnen Sie die Quadratur auf der rechte Seite der Gleichung mit einer einfachen Mittelpunktsregel.

e) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem wieder mit dem CG-Verfahren.

f) Berechnen Sie die Fehler mittels der L_2- und der H^1-Norm.