Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 7.

Abgabe am **04.12.2012**.

Aufgabe 18. (Aubin-Nitsche-Lemma)

Beweisen Sie die folgende Aussage:
Sei H ein Hilbertraum mit zugehöriger Norm $|\cdot|_H$ und Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_H$. Der Unterraum $V \subset H$ sei ebenfalls ein Hilbertraum mit der Norm $|\cdot|_V$. Ferner sei V dicht in H ($\overline{V} = H$) und die Einbettung $V \hookrightarrow H$ stetig. Für die schwachen Lösungen u, u_h der Variationsprobleme

$$\begin{aligned} a(u,v) &= (f,v) \quad \text{für alle } v \in V, \\ a(u_h,v_h) &= (f,v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h \subset V \end{aligned}$$

gilt dann

$$|u-u_h|_H \leq c \cdot |u-u_h|_V \cdot \sup_{g\in H, g\neq 0} \left\{ \frac{1}{|g|_H} \inf_{v_h \in V_h} |\phi_g - v_h|_V \right\},$$

falls jedem $g \in H$ die eindeutige (schwache) Lösung $\phi_g \in V$ des adjungierten Variationsproblems

$$a(v,\phi_g) = (g,v)_H \quad \text{für alle } v \in V \tag{1}$$

zugeordnet wird.

Hinweis: Beachten Sie, dass in Hilberträumen $|w|_H = \sup_{g\in H, g\neq 0}\left(\frac{|(g,w)_H|}{|g|_H}\right)$ für alle $w \in H$ gilt.

Bemerkung: Unter bestimmten Voraussetzungen an die Triangulierung lässt sich mit Hilfe dieses Lemmas für $H = H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ und $u \in H^2(\Omega)$ die Abschätzung $|u-u_h|_{L_2} \leq c \cdot h^2 |f|_{L_2}$ beweisen.

(5 Punkte)

Aufgabe 19. (Kondition der Steifigkeitsmatrix)

Bisher hatten wir uns stets mit dem Aufstellen der Finite-Elemente-Systeme beschäftigt. Nun wollen wir uns anschauen, wie einfach es ist, die dazugehörigen linearen Gleichunssysteme zu lösen, d.h. welche Kondition die entsprechende Steifigkeits-Matrix hat. Dazu sei $V_h = \text{span}\{\varphi_1, \ldots \varphi_M\}$ unser endlichdimensionaler Testraum mit $V_h \subset V$ und die Steifigkeitsmatrix

$$A = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{i,j=1,\ldots,M}\,.$$

Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ sei V-elliptisch und stetig auf $V \subset H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt. Des weiteren führen wir die Norm

$$||v||_{0,h} := \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \sum_{a_i \in K} |v(a_i)|^2 \right)^{1/2}$$

mit $a_1, \ldots, a_M$ den Knoten der Freiheitsgrade und h_K der Länge eines Elements $K \in \mathcal{T}_h$ ein. Es sei ferner $\mathcal{T}_h$ regulär. Damit können wir nun folgenden Satz formulieren:

Satz 1.
1. Es gibt von h unabhängige Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass für $v \in V_h$ gilt:
$$C_1||v||_0 \leq ||v||_{0,h} \leq C_2||v||_0$$

2. Es gibt eine von h unabhängige Konstante $C > 0$, so dass für $v \in V_h$ gilt:
$$||v||_1 \leq C \left(\min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \right)^{-1} ||v||_0.$$

Wir setzen nun ebenfalls voraus, dass es eine von h unabhängige Konstante $C_A > 0$ gibt, so dass für jeden Knoten aus $\mathcal{T}_h$ die Anzahl der Elemente, zu denen dieser Knoten gehört, durch C_A beschränkt ist. Schließlich erinnern wir uns, dass für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{M \times M}$ mit rellen Eigenwerten $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_M$ und einer Basis aus Eigenvektoren $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_M$, die als orthogonal gewählt werden, für $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^M \backslash \{\mathbf{0}\}$ gilt:
$$\lambda_1 \leq \frac{\boldsymbol{\xi}^T C \boldsymbol{\xi}}{\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}} \leq \lambda_M.$$

Die Schranken werden angenommen für $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1$ bzw. $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_M$.

Zeigen Sie nun folgende Aussage:

Die Steifigkeitsmatrix A besitze reelle Eigenwerte und eine Basis aus Eigenvektoren. Dann gibt es eine von h unabhängige Konstante $C > 0$, so dass für die spektrale Konditionszahl κ gilt:
$$\kappa(B^{-1}A) \leq C \left(\min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \right)^{-2},$$
$$\kappa(A) \leq C \left(\min_{K \in \mathcal{T}_h} h_k \right)^{-2} \kappa(B).$$

(5 Punkte)

Aufgabe 20. (Finite Elemente)

Das Gebiet $\Omega = (0,1)^2$ werde zunächst in N^2 Quadrate der Kantenlänge $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ zerlegt. Dann wird jedes der Quadrate in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt, wobei die Quadrate stets durch die Verbindung der unteren linken Ecke zur oberen rechten Ecke aufgespalten werden. Die Gitterpunkte bilden den diskreten Raum Ω_h.
Es seien die Gitterfunktionen $\phi_{ij}(x,y)$ auf Ω_h für $0 \leq i,j \leq N$ durch
$$\phi_{ij}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = ih \text{ und } y = jh \\ 0 & \text{für } (x,y) \in \Omega_h \text{ sonst} \end{cases}$$

definiert und in x- und y-Richtung stückweise linear.

a) Zeichnen Sie die beschriebene Triangulierung für $N = 5$, und markieren Sie den Träger von $\phi_{2,2}(x,y)$. Skizzieren Sie außerdem perspektivisch eine solche Gitterfunktion ϕ_{ij}. Wie viele Einträge pro Matrixzeile sind in der Finite-Element-Matrix maximal enthalten, wenn die Funktionen ϕ_{ij} als Ansatzfunktionen verwendet werden?

b) Berechnen Sie für den Laplace-Operator den Eintrag der resultierenden Steifigkeitsmatrix, der zu den beiden Knoten (ih, jh) und $(ih, (j+1)h)$ gehört, also den Eintrag $a(\phi_{ij}, \phi_{i,j+1})$.

(5 Punkte)