Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 8.

Abgabe am **11.12.2012**.

Aufgabe 21.

Man beweise das Bramble-Hilbert-Lemma wie in der Vorlesung gegeben, nur hier mit $t = 1$, indem man im Beweis Iv als konstante Funktion

$$Iv := \frac{\int_\Omega v dx}{\int_\Omega dx}$$

ansetzt.

Aufgabe 22. Betrachtet werde in einer Raumdimension $\Omega = (a, b)$ der polynomiale Lagrange-Ansatz auf Teilintervallen mit maximaler Länge h und es gelte für die jeweiligen lokalen Ansatzräume P die Inklusion $\mathcal{P}_k \subset P$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $v \in H^{k+1}(\Omega)$ und $0 \leq m \leq k+1$ gilt:

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - I_K(v)|_{m,K} \right)^{1/2} \leq C h^{k+1-m} |v|_{k+1}.$$

Wobei I_K der Interpolationsoperator auf einem einzelnen Element ist mit $I_K(u) := \sum_{j=1}^{L} u(a_{i_j}) \varphi_{i_j}$ für $u \in C(K)$, hier $L = 2$, a_{i_1}, a_{i_2} die Freiheitsgrade des i-ten Elements und $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}$ die lokal ausgewerteten nodalen Basen.

Aufgabe 23. Es sei ein Ω ein Quadrat, das mit einer Triangulierung $\mathcal{T}$ mit t Dreiecken mit v Eckpunkten überzogen sei. Bestimmen Sie die Dimension $d(t, v, n)$ der stetigen stückweisen Polynome mit totalem Grad kleiner oder gleich n. Betrachten Sie hierbei den Spezialfall, dass die Triangulierung aus $2m^2$ gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken Besteht.
Tipp: Zählen Sie die zu der Triangulierung gehörenden Lagrange-Funktionen, die aufgrund ihrer Interpolationseigenschaft eine Basis bilden. Verwenden Sie die Euler-Formel $t - e + v = 1$ mit e der Anzahl der Kanten.

Programmieraufgabe 4. (Quadratische Finite Elemente)

Wir wollen das Poisson-Problem

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{2}$$

auf dem Gebiet $\Omega = (0, 1)^2$ mit der Finite-Elemente-Methode lösen. Im Gegensatz zur vorangegangenen Programmieraufgabe werden wir aber nun als Ansatzfunktionen polynome vom Grad zwei, das heißt Finite Elemente mit 6 Freiheitsgraden pro Dreieck, verwenden. Das Einheitsquadrat werde dabei erneut in N^2 Quadrate der Kantenlänge $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ zerlegt und anschließend wird jedes der Quadrate in zwei rechtwinklige Dreiecke geteilt, wobei die Quadrate stets durch die Verbindung der unteren linken Ecke zur oberen rechten Ecke aufgespalten werden.

a) Geben Sie die schwache Formulierung für obiges Problem an.

b) Berechnen Sie auf dem Papier die Matrix-Einträge für die Steifigkeitsmatrix für quadratische Elemente.

c) Implementieren Sie die Matrix-Vektor-Operation, die die Steifigkeitsmatrix (ohne Aufstellen der vollen Matrix) auf einen Vektor anwendet. Die darin verwendete Schleife soll über die Elemente laufen und darin jeweils die Freiheitsgrade aufsummieren.

d) Berechnen Sie die Quadratur auf der rechte Seite der Gleichung mit einer einfachen Mittelpunktsregel.

e) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem wieder mit dem CG-Verfahren.

f) Berechnen Sie die Fehler mittels der L_2- und der H^1-Norm, wobei als "exakte" Lösung eine sehr fein aufgelöste numerische Lösung verwendet werden soll. Ermitteln Sie die Raten, mit denen die Fehler mit h abfallen.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in der Woche vom 17. bis 21.12.2012