Wissenschaftliches Rechnen I

Wintersemester 2012 / 2013
Prof. Dr. Carsten Burstedde
Peter Zaspel

universitätbonn

Übungsblatt 9.

Abgabe am **18.12.2012**.

Aufgabe 24. (Winkelbedingung)

Sei $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ eine Folge regulärer Triangulierungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, für $d = 2, 3$, die die uniforme Formbedingung erfüllt.

a) Beweisen Sie, dass jeder Knoten $z \in \mathcal{N}_h$ für alle $h > 0$ nur in uniform beschränkt vielen Elementen enthalten ist.

b) Beweisen Sie, dass die Innenwinkel der Dreiecke bzw. Tetraeder in der Folge $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ durch eine Konstante $\alpha > 0$ nach unten beschränkt sind.

c) Beweisen Sie, dass es eine von h unabhängige Konstante $C > 0$ gibt, so dass für $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ und $h_z := \operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\phi_z))$ gilt $\frac{1}{C}||v_h||_{L^2(\Omega)} \leq \sum\limits_{z \in \mathcal{N}_h} h_z^d |v_h(z)|^2 \leq C||v_h||^2_{L^2(\Omega)}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 25. (Transformationsformel)

Seien $T \subset \mathbb{R}^3$ und $T_{ref} \subset \mathbb{R}^2$ Dreiecke mit den Eckpunkten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^3$ und $y_1 = (0, 0)$, $y_2 = (1, 0)$, $y_3 = (0, 1)$.

a) Bestimmen Sie eine affin-lineare Transformation $\Phi : T_{ref} \to T$ mit $\Phi(y_i) = z_i$ für $i = 1, \ldots, 3$, berechnen Sie die Gram'sche Determinante $\sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)}$ und verifizieren Sie die Transformationsformel $\int_T \varphi(x)\mathrm{d}x = 2|T| \int_{T_{ref}} \varphi(\Phi(y))\mathrm{d}y$.

b) Seien ϕ_{z_i}, $i = 1, \ldots, 3$ die nodalen Basisfunktionen auf T und $\varphi = \phi_{z_1}\phi_{z_2}\phi_{z_3}$. Berechnen Sie $\int_T \varphi \mathrm{d}x$. Was fällt Ihnen auf?

(5 Punkte)

Aufgabe 26. (Massenmatrix)

Seien $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $(\phi_{z_1}, \ldots, \phi_{z_N})$ die nodale Basis von $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)$.

a) Verwenden Sie die Transformationsformel aus Aufgabe 25 um die Einträge $M^{(T)}_{k,\ell} = \int_T \phi_k \phi_\ell \mathrm{d}x$, $k, \ell = 1, \ldots, N$, $T \in \mathcal{T}_h$, der lokalen Massenmatrix zu berechnen.

b) Für $u \in C^0(\overline{\Omega})$ sei $\mathcal{I}_h[u] = \sum_{z \in \mathcal{N}_h} u(z)\phi_z \in \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)$ der nodale Interpolant von u. Berechnen Sie $M^{h,(T)}_{k,\ell} = \int_T \mathcal{I}_h[\phi_k\phi_\ell]\mathrm{d}x$, $k, \ell = 1, \ldots, N$, $T \in \mathcal{T}_h$.

c) Wie ergeben sich aus $M^{(T)}$ und $M^{h,(T)}$ die gobalen Massenmatrizen $M_{k,\ell} = \int_\Omega \phi_k \phi_\ell \mathrm{d}x$ bzw. $M^h_{k,\ell} = \int_\Omega \mathcal{I}_h[\phi_k\phi_\ell]\mathrm{d}x$?

(5 Punkte)