



Algorithmische Mathematik

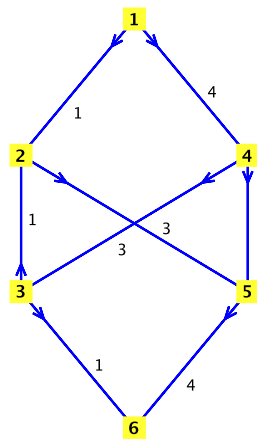
Wintersemester 2013
 Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer und
 Dr. Einar Smith
 Patrick Diehl und Daniel Wissel



Übungsblatt 6.

Abgabe am **02.12.2013**.

Aufgabe 1. (Netzwerke und Definitionen)



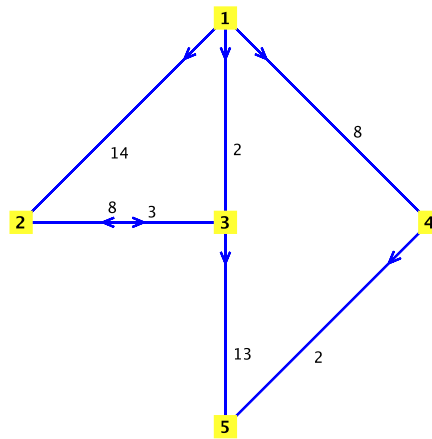
- Bestimmen Sie alle Quellen und Senken in diesem Netzwerk.
- Die Matrix F beinhaltet den Fluss zwischen zwei verbundenen Knoten im Netzwerk, wenn eine Kante vorhanden ist und ansonsten den Wert 0. Ähnlich einer Adjazenzmatrix, nur dass zusätzlich noch der Wert des Flusses kodiert ist. Entsprechen die Flusswerte der Definition eines Flusses im Skript?

$$F := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1 + 2 = 3 Punkte)

Aufgabe 2. (Maximaler Fluss)

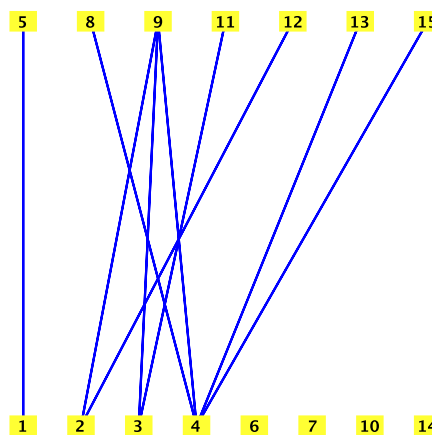
Bestimmen Sie mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus den maximalen Fluss $\text{flow}(f)$ im gegebenen Netzwerk. Beginnen Sie mit einem Nullfluss ($\forall e \in E : f(e) = 0$) und dem initialen Weg $\pi = 1, 3, 5$. Geben Sie in jedem Schritt $b(\pi)$ und $g(e)$ an.



(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Bipartites Matching)

Geben Sie das Bipartite Matching zu diesem Graphen an.



(2 Punkte)

Aufgabe 4. (Petersen-Graphen)

Der Petersen-Graph, benannt nach dem dänischen Mathematiker Julius Petersen (1839-1910), ist ein kleiner Graph, der in der Graphentheorie als Gegenbeispiel für viele Probleme verwendet kann. Ein Peterson-Graph besteht immer aus 10 Knoten und 15 Kanten und alle Knoten haben den Grad 3. Für jeden Petersen-Graph können die Kanten des Graphs über die Bezeichnung der Knoten kodiert werden. Hierzu wird jedem Knoten des Graphen eine Menge $\{a, b\}$ mit genau zwei Elementen $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ so zugeordnet, dass die beiden Mengen je zweier miteinander verbundenen Knoten disjunkt sind.

- Ordnen Sie jedem der Knoten im Graphen eine Menge zu, so dass das oben genannte Kriterium gilt.

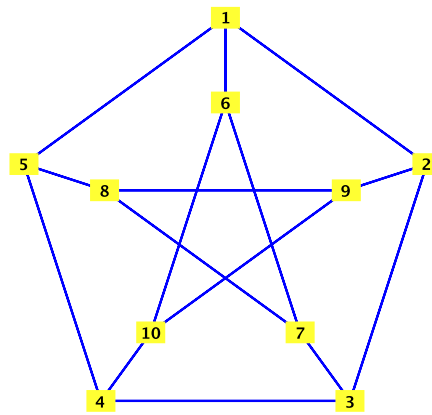


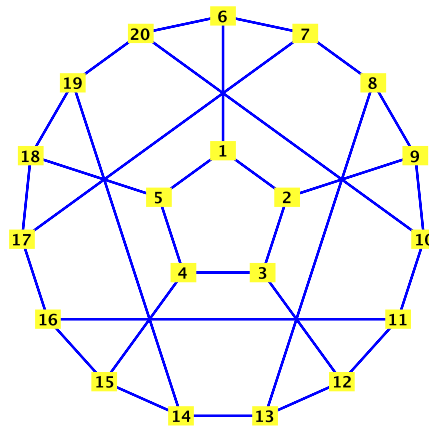
Abbildung 1: Beispiel für einen Petersen-Graphen.

- b. Beweisen Sie, dass zwei nicht benachbarte Knoten in einem Petersen-Graph genau einen gemeinsamen Nachbarn haben.

(2 + 2 + 4 Punkte)

Aufgabe 5. (Minimaler Spannbaum)

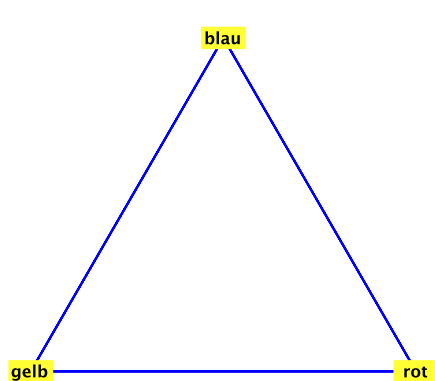
Geben Sie den minimalen Spannbaum für diesen Graphen an:



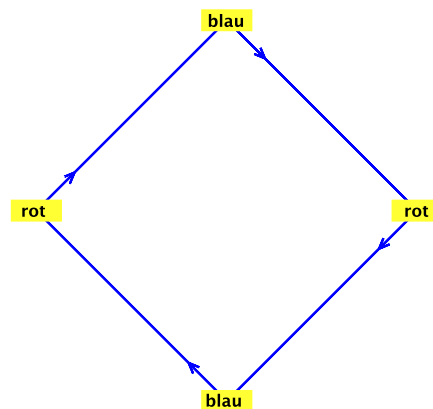
(1 Punkte)

Aufgabe 6. (Chromatisches Polynom)

Das chromatische Polynom $\chi(G, \lambda)$ gibt an wie viele Färbungen es für den Graphen G mit λ Farben gibt. Unter einer Färbung eines Graphen versteht man, dass die Knoten so eingefärbt werden, dass Knoten, die mit einer Kante verbunden sind keine gleiche Farbe haben dürfen.



(a) Beispiel einer dreifarbigen Färbung eines Dreiecks-Graphen K_3 .



(b) Beispiel einer zweifarbigen Färbung eines Kreis-Graphen C_4 .

- Wie viele Färbungen gibt es für den Dreiecks-Graphen K_3 mit drei Farben?
- Geben Sie das chromatische Polynom $\chi(K_3, \lambda)$ an.
- Geben Sie das chromatische Polynom $\chi(B_n, \lambda, n)$ für einen Baum mit $|V| = n$ an.
- Geben Sie das chromatische Polynom $\chi(C_n, \lambda, n)$ für einen Kreisgraphen C_n an.

Hinweis:

Erklären Sie in jedem Aufgabenteil kurz wie Sie auf das Ergebnis gekommen sind. Bei den letzten drei Teilaufgaben eignen sich Skizzen sehr gut dafür.

(4 · 1.5 = 6 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Adjazenzmatrix)

Wenn Graphen mittels einer Adjazenzmatrix gespeichert werden, dann kann sehr einfach entschieden werden, ob ein Graph zusammenhängend ist oder keine Kreise enthält.

- a. Ein Graph $G = (V, E)$ mit der Adjazenzmatrix A ist zusammenhängend, wenn für $B := (b_{i,j}) := \sum_{i=1}^{|V|-1} A^i$ gilt $b_{i,j} > 0$, if $i \neq j$.
- b. Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit der Adjazenzmatrix A ist kreisfrei, wenn $B := (b_{i,j}) := \sum_{i=1}^{|V|} A^i$ gilt $b_{i,j} = 0$, if $i = j$.

Bei der Implementierung muss der Speicher für die Matrix mit `malloc` allokiert werden. Abgaben, die statische Arrays verwenden, werden mit 0 Punkten bewertet.

- a. Machen Sie sich Gedanken, welche Funktionen Sie benötigen um zu entscheiden, ob ein Graph zusammenhängend oder kreisfrei ist. Notieren Sie sich diese Funktionen mit Namen und Parameter auf Papier.
- b. Implementieren Sie die zuvor definierten Funktionen.
- c. Testen Sie ihre Implementierung mit den beiden Graphen auf der Homepage.
- d. Ihr Programm muss am Ende ausgeben welcher der beiden Graphen:
 - (a) Zusammenhängend ist.
 - (b) Keine Kreise beinhaltet.

Hinweis:

Verwenden Sie das Template *Main_Template.c* auf der Homepage für die Aufgabe. Dort gibt es eine fertige Methode zum Einlesen der Graphen als Adjazenzmatrix.

(2 + 14 + 2 + 2 = 20 Punkte)

Abgabe am 09.12.2013 zwischen Vorlesung A und Vorlesung B