Algorithmische Mathematik

Wintersemester 2013
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer und
Dr. Einar Smith
Patrick Diehl und Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 7.

Abgabe am **09.12.2013**.

Aufgabe 1. (Kondition und Stabilität)

Die Funktion $c(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ soll bei $x \approx 0$, $x \neq 0$ ausgewertet werden.

a. Erklären Sie die Begriffe „Kondition" und „Stabilität".

b. Ermitteln Sie, ob die Auswertung von c an der Stelle x relativ gut konditioniert ist.

c. Geben Sie einen numerisch stabilen Algorithmus zur Berechnung von $c(x)$ an.

Hinweis zu b): Zur Berechnung der Ableitung benutzen Sie bitte die *Regel von de l'Hospital:* Für zwei auf einem Intervall $I \setminus \{c\}$ differenzierbare Funktionen f, g mit $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ gilt $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls letzterer Limes existiert sowie $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I \setminus \{c\}$.

$(2 + 1 + 1 = 4$ Punkte$)$

Aufgabe 2. (Auslöschung)

Bei direkter Auswertung der folgenden Ausdrücke in Gleitpunktarithmetik kommt es zu großen Fehlern durch Auslöschung (das ist der Fehler bei Gleitpunktsubtraktion fast gleicher Zahlen). Formen Sie die Ausdrücke so um, dass dieses Problem vermieden wird.

a. $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}$ für $|x| \ll 1$

b. $\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}}$ für $x \gg 1$

c. $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ für $|x| \ll 1$

d. $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}$ für $|x| \ll 1$

Hinweis zu b): Hier benötigen Sie die trigonometrischen Zusammenhänge zwischen den beiden Funktionen.

$(1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte$)$

Aufgabe 3. (Zahldarstellung)

Die Schreibweise $(\cdots)_b$ soll bedeuten, dass der in Klammern stehende Ausdruck $\cdots$ als Zahl zur Basis b interpretiert wird.

a. Stellen Sie die Zahlen $(125.75)_{10}$ und $\left(\frac{1}{6}\right)_{10}$ als normalisierte Gleitkommazahlen zur Basis $b = 2$ mit Mantissenlänge $k = 10$ dar, wobei Sie ggf. entsprechend der Mantissenlänge abschneiden.

b. Geben Sie eine Zahl an deren Darstellung als Dezimalzahl *endlich* viele, als Dualzahl aber *unendlich* viele Ziffern besitzt.

c. Gibt es Zahlen, deren Darstellung als Dezimalzahl unendlich, aber als Dualzahl endlich ist?

d. Kann es zwei Basen geben, so dass eine Zahl bezüglich der einen Basis eine periodische, bezüglich der anderen aber eine nichtperiodische (unendliche) Darstellung besitzt?

e. Bekanntlich gilt $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$. Zeigen Sie, dass diese Beziehung durch Wahl einer geeigneten Zahldarstellung sofort ablesbar ist.

$(2+1+1+1+1 = 6$ Punkte$)$

Aufgabe 4. (Stabilität)

Für gegebene Daten $x_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, M)$ berechnet sich der *Mittelwert* als

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i.$$

Die *Abweichung* der Daten ist definiert als

$$s_x^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(x_i - \bar{x})^2 . \tag{1}$$

a. Zeigen Sie zunächst

$$s_x^2 = \left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i^2\right) - \bar{x}^2. \tag{2}$$

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass Assoziativität und Distributivität für Operationen mit Gleitkommazahlen im Allgemeinen nicht gelten. Hierzu sehen wir uns folgendes Beispiel an. Es seien

$$\epsilon = 0.01 \qquad M = 2 \qquad x_1 = 1 - \epsilon \qquad x_2 = 1 + \epsilon.$$

b. Bestimmen Sie s_x^2 exakt (normales Rechnen).

c. Bestimmen Sie s_x^2 in Gleitpunktarithmetik zur Basis 10 mit 3 gültigen Stellen (also nach jeder Operation auf 3 Stellen runden) mit beiden Formeln (1) und (2).

d. Warum ist die zweite Formel (2) für s_x^2 trotzdem sehr beliebt?

$(2+1+2+1 = 6$ Punkte$)$