Algorithmische Mathematik

Wintersemester 2013
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer und
Dr. Einar Smith
Patrick Diehl und Daniel Wissel

universität bonn

Übungsblatt 9.

Abgabe am **06.01.2014**.

Aufgabe 1. (Gauß-Elimination)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Gauß-Elimination (ohne Pivotisierung).

(6 Punkte)

Aufgabe 2. (Diagonaldominante Matrizen)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt diagonaldominant, falls gilt:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Man zeige, dass für eine reguläre diagonaldominante Matrix die Gaußsche Elimination ohne Pivotisierung durchgeführt werden kann. Zeigen Sie dazu, dass die entstehenden Restmatrizen ebenfalls diagonaldominant sind, sowie deren Diagonalelemente von Null verschieden sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. (Rundungsfehler bei der Gauß-Elimination)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } -1 < \epsilon < 1.$$

mit $\epsilon = -10^{-5}$ und $b = (1,0)^T$. Bei der Lösung des Systems $Ax = b$ kann es nun je nach Vorgehensweise zu Stabilitätsproblemen kommen. Lösen Sie das System mittels Gauß-Elimination und zwar auf folgende vier verschiedene Arten:

a. Ohne Zeilenvertauschungen in exakter Arithmetik (d.h. mit Brüchen rechnen).

b. Ohne Zeilenvertauschungen mit Rundungsfehlern: jedes (Zwischen-)Ergebnis auf 5 Dezimalstellen runden (Gleitpunktarithmetik mit Basis $\beta = 10$, $n = 5$ Stellen Mantisse und mit korrekter Rundung: $0.0123456 = 0.123456 \cdot 10^{-1}$ gibt 0.012346).

c. Mit fünf Dezimalstellen Genauigkeit, aber nun mit *Spalten-Pivotsuche*: Bei Elimination von Zeile r die Zeile k mit dem betragsgrößten $a_{k,r}$, $r \leq k \leq n$, suchen und mit Zeile r vertauschen.

d. Mit fünf Dezimalstellen Genauigkeit und Spalten-Pivotsuche, aber erst, nachdem die erste Zeile des Gleichungssystems mit 10^6 durchmultipliziert wurde (was die Lösung ja nicht ändern sollte).

(1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)

Aufgabe 4. (Spezielle Matrizen)

Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert die *inverse* Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft $A^{-1}\cdot A = I_n$, wobei $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n} = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ die Einheitsmatrix ist ($\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ ist das sog. *Kronecker-Delta*). Als *Transponierte* der Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ bezeichnet man die Matrix $A^T = (a_{ji})_{j,i=1,\dots,n}$, welche entsteht, indem man die Zeilen der Matrix A als Spalten schreibt.

Wir betrachten im folgenden die Menge aller Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die gilt: $A^T\cdot A = I_n$, d.h. die Inverse ist gegeben durch die Transponierte der Matrix. Diese Menge bezeichnen wir mit $O(n)$. Zeigen Sie dazu folgende Aussagen:

a. Die Menge $O(n)$ bildet zusammen mit der Matrixmultiplikation $(\cdot)$ eine Gruppe.

b. Ist $A \in O(2)$, so existiert ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, so dass entweder

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

gilt.

Hinweis 1: Beachte die Formel $\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$.
Hinweis 2: Es handelt sich um die Menge der sog. *orthogonalen* Matrizen, welche weitere praktische Eigenschaften besitzen.

(2 + 4 = 6 Punkte)