Algorithmische Mathematik

Wintersemester 2013

Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer und
Dr. Einar Smith
Patrick Diehl und Daniel Wissel

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **13.01.2014**.

Aufgabe 1. (Gauß-Elimination)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & k & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Für welche k ist das Gaußsche Eliminationsverfahren (GEV) mit diagonaler Pivotwahl durchführbar? Für welche k ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, lösbar oder nicht lösbar? Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{R}$ die Lösungen mithilfe des GEV, falls welche existieren.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. (Äquivalenz von Normen)

a. Skizzieren Sie die Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$ für die Normen $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_1$.

b. Zeigen Sie die Abschätzungen

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2, \qquad \|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c. Zeigen Sie anhand geeigneter Beispiele, dass die Abschätzungen unter b. *scharf* sind, dass also die "$\le$"–Relationen nicht durch "$<$" ersetzt werden können.

$(1 + 2 + 1 = 4$ Punkte)

Aufgabe 3. (Cholesky–Zerlegung)

Ein *Skalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

a. Bilinearität:

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle$

b. Symmetrie: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

c. Positive Definitheit: $\langle x, x \rangle \ge 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv definit*, falls

$$\langle x, Ax\rangle > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$$

gilt, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ hier das *Standardskalarprodukt* $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y$ bezeichnet. Für eine symmetrische, positiv definite (oft abgekürzt: SPD) Matrix kann man stets die Cholesky–Zerlegung bestimmen. Berechnen Sie die Cholesky–Zerlegung LL^T der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 17 & 18 \\ -4 & 4 & 18 & 57 \end{bmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (14, 20, -7, 66)^T$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4. (Operator–Normen)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a. Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt die Eigenschaft $||AB||_{op} \leq ||A||_{op}||B||_{op}$.

b. Die Identität $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfüllt $||I||_{op} = 1$.

c. Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so gilt: $\quad ||A^{-1}||_{op} = \left(\inf_{||x||=1} ||Ax||\right)^{-1}.$

(4 Punkte)