



Algorithmische Mathematik

Wintersemester 2013
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer und
Dr. Einar Smith
Patrick Diehl und Daniel Wissel



Übungsblatt 12.

Abgabe am **20.01.2014**.

Aufgabe 1. (Cholesky-Zerlegung)

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

und lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (3, 13, 6)^T$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Normen)

- a. Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ und $\|\cdot\|$ eine Vektornorm im $\mathbb{R}^N$. Welche Voraussetzung an A wird benötigt, damit durch $\|x\|_A := \|Ax\|$ ebenfalls eine Norm im $\mathbb{R}^N$ definiert ist? Zeigen Sie auch, dass $\|x\|_A$ unter dieser Voraussetzung tatsächlich eine Norm definiert.
- b. Allgemein ist für jedes $p \in \mathbb{N}$ durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm im $\mathbb{R}^N$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

(2 + 4 = 6 Punkte)

Aufgabe 3. (Vorkonditionierung)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ heißt *zeilenäquilibriert*, falls gilt: $\sum_{k=1}^N |a_{jk}| = 1$ für alle $j = 1, \dots, N$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a. Es sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ zeilenäquilibriert und regulär. Dann gilt für jede reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$ die Abschätzung $\text{cond}_\infty(A) \leq \text{cond}_\infty(DA)$.
- b. Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ definiere die Diagonalmatrix $T := \text{diag}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_N^{-1})$ mit $\alpha_j = \sum_{k=1}^N |a_{jk}|$. Dann gilt $\text{cond}_\infty(TA) \leq \text{cond}_\infty(A)$.

(2 + 2 = 4 Punkte)

Aufgabe 4. (*LR-Zerlegung*)

- a. Berechnen Sie die
- LR*
- Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

wobei $\forall i \quad l_{ii} = 1$ mit $L = (l_{ij})$ gelte.

- b. Berechnen Sie
- A^{-1}
- durch Lösen der Gleichungssysteme

$$Ly_k = e_k, \quad Rx_k = y_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Dabei sind e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$.

- c. Bestimmen Sie die Kondition
- $\kappa_\infty(A) = \text{cond}_\infty(A)$
- der Matrix
- A
- .

(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (*LR-Zerlegung, Teil 1*)

- a. Schreiben Sie ein C-Programm, das die *LR*-Zerlegung (ohne Pivotisierung) einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ berechnet und die Matrizen L (mit 1 auf der Diagonalen) und R ausgibt. In jedem Schritt soll geprüft werden, ob das Diagonalelement, durch das dividiert wird, von Null verschieden ist und ggf. mit einer Fehlermeldung abgebrochen werden. Die Matrizen L und R sollen dabei (ohne die Diagonale von L) in einem gemeinsamen $N \times N$ -Array gespeichert werden. Testen Sie Ihr Programm anhand der beiden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & 1 & 7 & -1 \\ 9 & 6 & 3 & 16 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & -10 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b. Erweitern Sie das obige Programm um Funktionen zur Vorwärtssubstitution $Ly = b$ und Rückwärtssubstitution $Rx = y$. Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $A_1x = b$, wobei $b = (4 \quad 1 \quad 10 \quad 17 \quad 3)^T$, und geben Sie den Lösungsvektor x aus.

Hinweis: Verwenden Sie die Matrix-Strukturen und -Operationen aus Programmieraufgabe 1, Blatt 6.

(8 + 4 = 12 Punkte)

Abgabe am 27.01.2014 zwischen Vorlesung A und Vorlesung B

Programmieraufgabe 2. (*LR-Zerlegung, Teil 2*)

Erweitern Sie Ihr Programm aus der vorigen Aufgabe um folgende zwei Optionen:

- a. Gauß-Elimination zum Lösen von $Ax = b$. Testen Sie Ihren Code mit dem obigen Beispiel $A_1x = b$.
- b. Berechnung der inversen Matrix A^{-1} . Testen Sie erneut Ihre Implementierung anhand der Matrix A_1 .

(4 + 4 = 8 Punkte)

Abgabe am 27.01.2014 zwischen Vorlesung A und Vorlesung B