Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Dienstag, 05.11.**

Aufgabe 1. (Auswirkung der Kondition bei Ausgleichsproblemen)

Diese Aufgabe soll verdeutlichen, dass sich beim Übergang zu den Normalengleichungen die Kondition einer Matrix signifikant verschlechtert. Die Rechnungen in (a) sollten mit einer geeigneten Software (Matlab / Octave, Mathematica / Maple / Wolfram Alpha o.ä.) durchgeführt werden.

a) Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $\|b - Ax\|_2 \stackrel{!}{=} \min$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.999 & 1.001 \\ 1.001 & 0.999 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0.667 \\ 0.667 \\ 0.667 \end{bmatrix}.$$

Berechne eine Lösung des eigentlichen sowie eine Lösung des mit $\Delta b = (0, -0.001, 0)^T$ gestörten Problems $\|A\tilde{x} - \tilde{b}\|_2 \stackrel{!}{=} \min$, $\tilde{b} = b + \Delta b$.

Berechne desweiteren die Residuen $r := \|b - Ax\|_2$ und $\tilde{r} := \|\tilde{b} - A\tilde{x}\|_2$ sowie die Kondition von A und A^TA. Vergleiche.

b) Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A. Zeige, dass

$$\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(R) = \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(A), \quad \text{wohingegen} \quad \operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(A^TA) = \big(\operatorname{cond}_{\|\cdot\|_2}(A)\big)^2.$$

Hinweis: Für die zweite Gleichung kann zunächst folgendes gezeigt werden:

(1) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^k ein Eigenwert von A^k.

(2) Ist λ ein nichtverschwindender Eigenwert des Produkts AB zweier beliebiger Matrizen, so ist λ auch ein Eigenwert von BA.

Aufgabe 2. (Bestimmung des Matrixkerns)

Es seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rank}(A) = n \le m$ sowie $Q \in \mathbb{K}^{m\times m}$ mit $Q^{-1} = Q^H$ und eine rechte obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben, sodass $A = QR$ ist. Zeige:

a) Die Matrix $\hat{Q} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, die aus den ersten n Spalten von Q gebildet wird, besitzt dasselbe Bild wie die Matrix A, d.h. es gilt $\operatorname{Ran} A = \operatorname{Ran} \hat{Q}$.

b) Die letzten $m - n$ Spalten von Q bilden eine orthogonale Basis von $\operatorname{Ker} A^H$.

Aufgabe 3. (Lösung linearer Ausgleichsprobleme)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit rank $A = n \le m$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Betrachtet wird das Problem

$$\|b - Ax\|_2 \stackrel{!}{=} \min.$$

Um dieses praktisch zu lösen, wird oft von einer reduzierten QR-Zerlegung der gegebenen Matrix A ausgegangen (Kondition!). Dazu setzt man $\hat{Q}^H b = [c, d]^T$ und erhält $x_{\min}$ durch Rückwärtseinsetzen aus $\hat{R}x = c$.

a) Eine zweite Möglichkeit besteht darin, eine reduzierte QR-Zerlegung der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A, b]$ in der Form

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q} & q_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R} & z \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$$

zu bestimmen. Anschließend berechnet man x_a aus $\hat{R}x = z$.

Zeige, dass x_a tatsächlich das ursprüngliche Problem löst und $\rho = \|b - Ax_\mathrm{a}\|_2$ gilt.

b) Betrachte nun als dritte Variante das erweiterte System

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und passenden Vektoren r und x. Zeige, dass das System stets eine eindeutige Lösung besitzt und dass diese Lösung aus den Komponenten x_b und r_b besteht, wobei x_b die Lösung des obigen Ausgleichsproblems ist und $r_\mathrm{b} = b - Ax_\mathrm{b}$.

Aufgabe 4. (QR-Zerlegung nach Householder)

Gegeben seien die folgenden Messwerte für zwei Größen x und y:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
x_i	$1/2$	1	$-1/2$
y_i	1	$\sqrt{3}$	2

Aufgrund theoretischer Betrachtungen ist bekannt, dass x und y folgendem Zusammenhang genügen:

$$\alpha/x + \beta y^2 = c,$$

wobei c eine reelle Konstante ist. Die reellen Parameter α und β sollen optimal im Sinne des Kleinste-Quadrate-Fehlers bestimmt werden.

Stelle ein entsprechendes lineares Ausgleichsproblem auf. Bestimme die Lösung dieses Problems mithilfe einer QR-Zerlegung nach Householder.
