Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag, 19.11.**

Aufgabe 1. (Invarianzeigenschaften des Lanczos-Verfahrens)

Zeige die folgenden Eigenschaften des Lanczos-Verfahrens.

a) Das Lanczos-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix $A - \sigma I$ für beliebiges $\sigma \in \mathbb{C}$ bei gleichem Startvektor v stets dieselbe Matrix W_k.

b) Das Lanczos-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix A mit Startvektor v dieselbe Tridiagonalmatrix T_k wie für die Matrix $Q^H A Q$ mit Startvektor $Q^H v$, falls Q unitär ist.

Was folgt aus (b) für die theoretische Analyse des Verfahrens?

Aufgabe 2. (Arnoldi-Verfahren mit Householder-Transformationen)

Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben. Der in der Vorlesung vorgestellte Arnoldi-Algorithmus zur Berechnung einer Orthogonalbasis der Krylov-Raums beruht auf dem modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren. Dieses Vorgehen ist numerisch weniger stabil als die Orthogonalisierung mithilfe von Householder-Transformationen.
Gib in Pseudocode eine Version des Arnoldi-Verfahrens an, die Householder-Transformationen verwendet. Vergleiche den Rechenaufwand der beiden Varianten.

Aufgabe 3. (GMRES – ein Beispiel)

Der Vektor $x^* = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ löst das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass das GMRES-Verfahren mit $x_0 = 0$ die Iterierten $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ und $x_n = x^*$ liefert.

Aufgabe 4. (Darstellung des Residuums bei GMRES)

Es sei $e_i^{(n)}$ der i-te Einheitsvektor im $\mathbb{C}^n$. Die Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\min_{y \in \mathbb{C}^k} \left\| \tilde{H}_k y - \|r_0\|_2 \, e_1^{(k+1)} \right\|_2$$

im k-ten Schritt des GMRES-Verfahrens werde mit y_k bezeichnet. Desweiteren sei

$$v_k := \tilde{H}_k y_k - \|r_0\|_2 \, e_1^{(k+1)}.$$

Die Sinus- und Kosinuswerte der bei der QR-Zerlegung von $\tilde{H}_k$ auftretenden Givens-Rotationen $G_{j,j+1} \in \mathbb{C}^{(k+1)\times(k+1)}$ seien mit s_j bzw. c_j, $j = 1, \ldots, k$, bezeichnet.
Zeige damit: Für die Norm des Residuums im k-ten Schritt gilt

$$\|r_k\|_2 = \|r_0\|_2 \, |s_1 \cdot s_2 \cdots s_k|.$$