Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 5.

Abgabe am **Dienstag**, **26.11.**

Aufgabe 1. (Zusammenhang zwischen FOM und GMRES)

Das x_k aus dem GMRES-Verfahren sei nun mit x_k^{G} bezeichnet. Im Unterschied dazu sei y_k^{F} die Lösung der Gleichung $H_k y = \|r_0\|_2 \, e_1^{(k)}$ im k-ten Schritt des FOM-Verfahrens und

$$x_k^{\mathrm{F}} := \tilde{H}_k y_k^{\mathrm{F}} - \|r_0\|_2 \, e_1^{(k+1)}.$$

Die entsprechenden Residuen nach k Schritten seien analog mit r_k^{G} bzw. r_k^{F} bezeichnet.

a) Zeige, dass auch für das FOM-Verfahren $\left\|r_k^{\mathrm{F}}\right\|_2 = \left\|x_k^{\mathrm{F}}\right\|_2$ gilt!

b) Wie in Aufgabe 4 von Übungsblatt 4 seien s_j und c_j die Einträge der Givens-Matrizen zur Zerlegung von $\tilde{H}_k$.
Zeige: Es gilt $\left\|x_k^{\mathrm{F}}\right\|_2 = \|r_0\|_2 \frac{1}{|c_k|} |s_1 \cdot s_2 \cdots s_k|$.

c) Wie folgt daraus die Gleichung $\left\|r_k^{\mathrm{G}}\right\|_2 = |c_k| \left\|r_k^{\mathrm{F}}\right\|_2$?

Aufgabe 2. (GMRES bei k verschiedenen Eigenwerten)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit k verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$. Zeige, dass das GMRES-Verfahren nach spätestens k Iterationen abbricht.

Aufgabe 3. (Vorkonditionierung: Spaltenäquilibrierung)

Unter einer Spaltenskalierung versteht man die Multiplikation eines Gleichungssystems mit einer Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}\{d_j\}$ von rechts: $Ax = b \to AD\tilde{x} = b$, $x = D\tilde{x}$. Eine solche Skalierung wird mit dem Ziel durchgeführt, die Kondition des Problems zu verringern, sodass also $\operatorname{cond}(AD) \leq \operatorname{cond}(A)$.
Eine Spaltenäquilibrierung ist eine spezielle Form der Spaltenskalierung, bei der

$$d_j := \frac{\|A\|_1}{\sum_i |a_{ij}|}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

gewählt wird. Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ wird im folgenden als regulär vorausgesetzt. Zeige:

a) Es gilt $\|D\|_\infty^{-1} \operatorname{cond}_1(A) \leq \operatorname{cond}_1(AD) \leq \operatorname{cond}_1(A)$.

b) Mit einer beliebigen Diagonalmatrix $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $\operatorname{cond}_1(AD) \leq \operatorname{cond}_1(AC)$.

Abgabe der Programmieraufgabe am 02. oder 03. Dezember im CIP-Pool

Programmieraufgabe. (GMRES)

Beispiel 2.2 in der Vorlesung führt auf eine schwach besetzte Matrix.
Schreibe ein Programm, dass das auftretende Gleichungssystem $Ax = b$ bei gegebenem N mit dem GMRES-Verfahren löst und teste es anhand $N = 10$, $b_i = 1$, $i = 1, \ldots, N^2$ und $x_0 = b$.
Hinweis: Wie bei allen Arnoldi-Verfahren geht die Systemmatrix allein durch Matrix-Vektor-Multiplikationen in die Berechnung ein. Da die zu verwendende Matrix dünn besetzt ist, bietet es sich an, die Matrix-Vektor-Multiplikation für dieses Beispiel direkt zu implementieren. Will man allgemein bleiben, muss der Algorithmus für ein bestimmtes Matrixformat (CRS-, CCS-Format; Bandmatrixformate) umgesetzt werden. Die vollständige Matrix wird in keinem der Fälle aufgestellt.
