Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag**, **17.12.**

Aufgabe 1. (Folgerung aus dem Satz von Courant-Fischer)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ positiv-definit und $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit $\operatorname{rank} B = m$.
Zeige, dass

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^H & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$$

genau n positive und m negative Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 2. (Charakterisierung normaler Matrizen)

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt normal, falls $A^HA = AA^H$. In der Vorlesung wurde der Spektralsatz für normale (wie auch für hermitesche) Matrizen gezeigt.
Zeige die folgenden weiteren Charakterisierungen.

a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann normal, wenn $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind.

b) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann normal, wenn $\|Ax\|_2 = \|A^Hx\|_2$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$.

   Hinweis: Betrachte für die Richtung „Normäquivalenz $\Rightarrow$ Normalitätseigenschaft“ die Funktion $f(x) := \|A^Hx\|_2^2 - \|Ax\|_2^2$, die nach Voraussetzung für jedes $x \in \mathbb{C}^n$ verschwindet. Zu zeigen ist $\|(AA^H - A^HA)x\| = 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$.

Aufgabe 3. (Quadratwurzel positiv semidefiniter Matrizen)

Als Wurzeln einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ bezeichnet man alle Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, die mit sich selbst multipliziert A ergeben:

$$A = B^2 \quad \Longleftrightarrow \quad B \text{ ist Wurzel von } A.$$

Es seien $A, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitesche Matrizen und A sei zusätzlich positiv (semi)definit.
Zeige die folgenden Aussagen.

a) Es existiert eine Quadratwurzel von A, die ebenfalls positiv (semi)definit ist.

b) Alle Eigenwerte von AC sind reell.

c) Ist A positiv definit, so ist AC diagonalisierbar.

Bemerkung: Das Produkt beliebiger hermitescher Matrizen hingegen ist im Allgemeinen nicht einmal diagonalisierbar, geschweige denn hermitesch.

Aufgabe 4. (Folgerungen aus dem Satz von Gerschgorin)

a) Gib mithilfe des Satzes von Gerschgorin und Transformationen der Form $A \mapsto D^{-1}AD$ mit einer Diagonalmatrix D eine möglichst gute Lokalisierung der Eigenwerte von

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 10^{-5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

an.

b) Es seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix und G_j, $j = 1, \ldots, n$, die zu dieser Matrix gehörenden Gerschgorin-Kreise. Für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei G_i disjunkt zu allen anderen Kreisen. Zeige, dass genau ein Eigenwert von A in G_i liegt und dass zu diesem ein Eigenvektor x existiert mit $x_i = 1$ und $|x_j| < 1$ für alle $j \neq i$.

c) Zeige: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch und $\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| < a_{ii}$ für alle i, dann ist A positiv definit.
