Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag**, **07.01.**

Aufgabe 1. (Rayleigh-Quotient)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und (λ, x) ein zu A gehörendes Eigenpaar. Zeige für den Rayleigh-Quotienten μ_A folgende Störungseigenschaften: Es gilt

a) $|\mu_A(x+h) - \mu_A(x)| = \mathcal{O}(\|h\|)$ für $h \to 0$,

b) $|\mu_A(x+h) - \mu_A(x)| = \mathcal{O}(\|h\|^2)$ für $h \to 0$, falls A hermitesch ist.

Aufgabe 2. (Vektoriteration für hermitesche Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ und zugehörigen normierten Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$. Mithilfe des Algorithmus für das Verfahren der Vektoriteration berechnet man eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Näherungen an v_1. Zeige, dass mit $q := |\lambda_2/\lambda_1|$

$$|\mu_A(x_k) - \lambda_1| = \mathcal{O}(q^{2k})$$

gilt!
Hinweis: Nutze aus, dass für hermitesche Matrizen die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis bilden.

Aufgabe 3. (Weihnachten bei Meier I)

Zu Weihnachten beschenken sich die Mitglieder der Familie Meier, bestehend aus den Geschwistern Tim und Lisa sowie ihren Eltern. Die Eltern schenken Tim ein Fahrrad und Lisa ein ferngesteuertes Auto. Weil Lisa beim Holzhacken im Herbst eine unerlässliche Hilfe war, bekommt sie von ihrer Mutter ein weiteres Geschenk. Beide Kinder haben jeweils etwas für Mutter und Vater gebastelt. Der Vater erfreut seine Frau mit einer Kleinigkeit, umgekehrt ist dies nicht der Fall. Außerdem bekommt Tim noch ein Bild von Lisa überreicht. Am 1. Weihnachtsfeiertag streiten die Kinder über die Frage, wer wohl das beliebteste Familienmitglied sei.
Um Lisa und Tim zu helfen, führen wir nichtnegative Beliebtheitsvariablen x_T, x_L, x_M, x_V ein. Ist n_A die Anzahl der Geschenke, die die Person A insgesamt verteilt, so soll sich die Beliebtheit x_B von Person B um den Wert x_A/n_A erhöhen, sofern A ein Geschenk an B überreicht hat, das heißt, es gilt z. B. $x_T = 1/2 \cdot x_L + 1/4 \cdot x_M + 1/4 \cdot x_V$.
Zeige, dass sich das Beliebtheitsproblem als Eigenwertaufgabe $\lambda x = Ax$ mit $\lambda = 1$ formulieren lässt. Zeige, dass $\lambda = 1$ der größte Eigenwert von A ist.

Abgabe der Programmieraufgabe am im CIP-Pool am 13.01. oder 14.01.

Programmieraufgabe. (Weihnachten bei Meier II)

Implementiere die folgenden in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zur Behandlung von Eigenwertproblemen:

a) Vektoriteration

b) Inverse Iteration

c) Rayleigh-Quotienten-Verfahren.

Teste die Algorithmen Problem aus Aufgabe 3:
Verwende als Startvektor $x_0 := \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, um einen Eigenvektor zu approximieren.
Verwende als Shift für die Inverse Iteration $\mu = 0.9$ und $\mu = 0.5$.
Wie viele Schritte sind jeweils notwendig, um eine Genauigkeit von 10^{-5} für $\|x - Ax\|$ zu erreichen?
Wer muss gemäß diesem Modell als beliebtestes Familienmitglied angenommen werden?