Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014

Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Dienstag**, **14.01.**

Aufgabe 1. (Orthogonale Iteration — Konvergenzbeweis)

Eine Verallgemeinerung der Vektoriteration stellt das sog. Verfahren der orthogonalen Iteration dar. Ein möglicher Algorithmus lautet:

Gegeben sei eine Startmatrix $X_0 \in \mathbb{C}^{n\times p}$ mit $X_0^H X_0 = I$.
`For` $k = 1, 2, \dots$ `{`
$\quad Y_k := AX_{k-1}$;
$\quad$ berechne eine QR-Zerlegung $X_k R_k = Y_k$;
`}`

Damit ist $Y_k \in \mathbb{C}^{n\times p}$, $X_k \in \mathbb{C}^{n\times p}$ sowie $R_k \in \mathbb{C}^{p\times p}$, und es gilt $X_k^H X_k = I \in \mathbb{C}^{p\times p}$, d.h., die (reduzierte) QR-Zerlegung ersetzt den Normierungsschritt.
Es sei $\mathcal{X}_k := \operatorname{Ran} X_k$ der von den Spalten von X_k aufgespannten Unterraum. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass unter vernünftigen Voraussetzungen die Folge $\{\mathcal{X}_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den A-invarianten Unterraum $\mathcal{V}_p := \operatorname{Ran} V_p$ mit $V_p := (v_1, \dots, v_p)$, aufgespannt von Eigenvektoren zu den p betragsgrößten Eigenwerten, konvergiert.
Zeige im Beweis des folgenden Satzes die Teilaussagen (a) – (e).

Satz. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n| > 0.$$

Für die Startmatrix gelte $X_0^H X_0 = I$ sowie $\mathcal{X}_0 \cap \operatorname{span}\{v_{p+1}, \dots, v_n\} = \{0\}$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, sodass mit $q := |\lambda_{p+1}/\lambda_p|$

$$d(\mathcal{X}_k, \mathcal{V}_p) \leq c \cdot q^k$$

für alle hinreichend großen k.

Beweis. Gezeigt wird auf direktem Weg die Abschätzung $\left\|P_{\mathcal{X}_k} - P_{\mathcal{V}_p}\right\|_2 \leq cq^k$.

a) Zunächst einmal gilt $\mathcal{X}_k = A^k \cdot \mathcal{X}_0$. (Beweis durch vollständige Induktion)

Es seien $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{C}^n$ die Spalten von X_0. Da die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{C}^n$ bilden, besitzt jede Spalte eine Darstellung der Form

$$x_i = \sum_{j=1}^{p} c_{ij} v_j + t_i, \quad t_i = \sum_{i=p+1}^{n} d_{ij} v_j \in \operatorname{span}\{v_{p+1}, \dots, v_n\}, \quad i = 1, \dots, p,$$

d. h., es ist $X_0 = V_p C^T + T_p$ mit $C = (c_{ij}) \in \mathbb{C}^{p\times p}$ und $T_p := (t_1, \dots, t_p)$.

b) Die Koeffizientenmatrix C ist regulär.

Wegen $\tilde{X}_0 := X_0 C^{-T} = V_p + \tilde{T}_p$ kann jede Spalte von X_0 o. B. d. A. in der Form

$$x_i = v_i + t_i, \quad t_i \in \operatorname{span}\{v_{p+1}, \dots, v_n\},$$

dargestellt werden (d.h., im folgenden wird das C^T einfach weggelassen).

c) Durch $\{w_1^{(k)}, \dots, w_p^{(k)}\}$, $w_i^{(k)} := v_i + \lambda_i^{-k} A^k t_i$, ist eine Basis von $\mathcal{X}_k$ gegeben.

d) Damit gilt $\|w_i^{(k)} - v_i\|_2 \leq \hat{c} q^k$ mit einer von k unabhängigen Konstante $\hat{c}$.

e) Für die entsprechenden Matrizen $W_p^{(k)} := (w_1^{(k)}, \dots, w_p^{(k)})$ und V_p gilt dann

$$\|W_p^{(k)} - V_p\|_2 \leq \hat{c} q^k \sqrt{p}.$$

(*Hinweis*: Definition der Matrixnorm; Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Die Behauptung schließlich folgt aus

$$\|W_p^{(k)}\big((W_p^{(k)})^H W_p^{(k)}\big)^{-1}(W_p^{(k)})^H - V_p\big(V_p^H V_p\big)^{-1} V_p^H\|_2 \leq \bar{c}\,\|W_p^{(k)} - V_p\|_2$$

für hinreichend großes k. □

Aufgabe 2. (QR-Verfahren bei symmetrischen Tridiagonalmatrizen)

In dieser Aufgabe werden symmetrische Tridiagonalmatrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & & 0 \\ \gamma_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & & \gamma_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

untersucht.

a) Berechne zunächst für den Spezialfall $n = 2$ und $\gamma_1 = 1$ jeweils einen Schritt der Vektoriteration sowie der einfachen QR-Iteration mit dem Startvektor $(1, 0)^T$.

Schließe auf das Konvergenzverhalten. Wieso ergibt sich kein Widerspruch zu den einschlägigen Sätzen der Vorlesung?

b) Zeige, dass für allgemeine $n \in \mathbb{N}$ mit jedem Eigenwert λ der Matrix A auch $-\lambda$ ein Eigenwert von A ist.

Hinweis: Zeige, dass das charakteristische Polynom von A für gerade n eine gerade und für ungerade n eine ungerade Funktion ist.

c) Zeige unter Verwendung von Givens-Rotationen, dass die einfache QR-Iteration die Diagonale der Matrix A nicht verändert.

Warum widerspricht auch diese Tatsache nicht der Vorlesung?

Aufgabe 3. (QR-Verfahren — Konvergenzbeschleunigung durch Shift)

Gegeben sei mit einem reellen Parameter ε die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Führe per Hand einen Schritt des QR-Verfahrens

a) ohne Shift bzw.

b) mit Einfachshift um $\mu = 1$

aus. Welche Konvergenzordnung ergibt sich im Fall (b)?

Aufgabe 4. (Implizite Shifts)

Zeige die folgende Aussage, mit deren Hilfe sich die implizite Shift-Technik beim QR-Verfahren begründen lässt:

> **Satz.** Stimmen die unitären Matrizen Q und $\tilde{Q}$ in ihrer ersten Spalte überein und ist sowohl $Q^H A\, Q$ als auch $\tilde{Q}^H A\, \tilde{Q}$ von (irreduzibler) oberer Hessenberg-Gestalt, dann stimmen beide Produkte bis auf eine diagonale Ähnlichkeitstransformation überein. Dabei gilt für die Transformationsmatrix D die Gleichung $|D| = I$.

Hinweise: Konkret zu zeigen ist das folgende: Es sei

$$H = (h_{ij}) := Q^H A\, Q, \qquad \tilde{H} = (\tilde{h}_{ij}) := \tilde{Q}^H A\, \tilde{Q}.$$

Zeige, dass $\tilde{H}D = DH$ für ein unitäres D gilt und dass diese Matrix D sogar diagonal sein muss; betrachte die Spalten 1 bis $n-1$ von $\tilde{H}D$.
Ist $Qe_1 = \tilde{Q}e_1$ und ist $h_{i,i-1} \neq 0$ für alle $1 < i \leq n$ (Irreduzibilität), dann gilt darüber hinaus auch $Qe_i = \theta_i \tilde{Q} e_i$ und $|h_{i,i-1}| = |\tilde{h}_{i,i-1}|$, wobei $|\theta_i| = 1$.
