Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag**, **21.01.**

Aufgabe 1. (QR-Verfahren für spezielle Hessenberg-Matrizen)

Es sei $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle Hessenberg-Matrix mit angeordneten Eigenwerten

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-2}| > |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n|$$

und $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

a) Erläutere, warum die in der Vorlesung in der Bemerkung nach Satz 3.44 vorgeschlagene Einfach-Shift-Strategie mit dem Shiftpolynom $f_k = x - a_{nn}^{(k)}$ in diesem Fall nicht sinnvoll ist.

b) Eine bessere Strategie ist die folgende: In jedem Schritt werden sukzessive zwei Einfach-Shifts um λ_n und λ_{n-1} durchgeführt. Wie lässt sich dies mit ausschließlich reeller Arithmetik (komplexe Operationen sind für reelle Matrizen zu aufwendig) bewerkstelligen?

Aufgabe 2. (Eigenpaare spezieller Tridiagonalmatrizen)

Zeige, dass die Tridiagonalmatrix

$$T := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & & \\ \beta & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \beta\gamma > 0,$$

für $k = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\mathrm{sign}(\beta)\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

und zugehörige Eigenvektoren v_k mit

$$(v_k)_\ell = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\ell-1}{2}} \sin\left(\frac{k\ell\pi}{n+1}\right)$$

für $\ell = 1, \ldots, n$ besitzt.

Aufgabe 3. (Symmetrische Tridiagonalmatrizen)

Gegeben sei eine symmetrische, tridiagonale Matrix A mit einem Eigenwert $\lambda \in \sigma(A)$, der die algebraische Vielfachheit k besitzt.
Zeige, dass in diesem Fall mindestens $k-1$ Subdiagonaleinträge von A null sein müssen.

Abgabe der Programmieraufgabe am im CIP-Pool am 27.01. oder 28.01.

Programmieraufgabe. (QR-Iteration zur Berechnung aller Eigenpaare)

Implementiere die QR-Iteration mit Shift zur Bestimmung aller Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Geh dabei wie folgt vor:

a) Schreibe eine Funktion, die die Matrix A mittels Householder-Reflexionen auf eine ähnliche Matrix $H = QAQ^T$ in oberer Hessenberg-Form transformiert. Achte dabei darauf, dass dies in $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen geschieht.

b) Implementiere die QR-Zerlegung für eine Matrix H mittels Givens-Rotationen. Beachte dabei die bereits vorliegende Gestalt von H aus Teil (a). Hierfür sind nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen nötig.

c) Erstelle eine Routine zur Berechnung der Eigenpaare, die mithilfe der Funktionen aus (a) und (b) die QR-Iteration mit Shift aus der Vorlesung für A realisiert. Die Zahl der Iterationen soll maximal $k_{\max} = 200$ betragen. Ein Rückgabeparameter soll aus einer Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von R_k bestehen, ein weiterer aus einer Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von A sind, die aus der orthogonalen Matrix Q mit $A = QR_kQ^T$ erhalten werden können.

Teste den Algorithmus an folgender Matrix:

$$M := I - \frac{1}{10}A \in \mathbb{R}^{5\times 5}, \qquad \text{wobei} \qquad A := \begin{pmatrix} -6 & 6 & & & \\ 1 & -4 & 1 & 2 & \\ & 1 & -5 & 2 & 2 \\ & 2 & 2 & -6 & 2 \\ & & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$
