Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2013/2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **Dienstag**, **28.01.**

Aufgabe 1. (Startvektor beim Lanczos-Verfahren)

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit einem einfachen Eigenwert λ_1 und zugehörigem Eigenvektor v_1.
Zeige, dass die tridiagonale Matrix $T_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ aus der Lanczos-Zerlegung nach Abbruch mit $\beta_{k+1} = 0$ keinen Eigenwert gleich λ_1 hat, wenn der Startvektor x_0 senkrecht auf v_1 steht!
Hinweis: Verwende Aufgabe 1b) von Übungsblatt 4 und beachte, dass A unitär diagonalisierbar ist!

Aufgabe 2. (Parameterwahl im Jacobi-Verfahren)

Zeige das folgende Lemma aus der Vorlesung.

> **Lemma 3.56.** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann gilt
>
> $$\left\|A - J_{k\ell}^H A J_{k\ell}\right\|_F^2 = \frac{2}{c^2} a_{k\ell}^2 + 4(1-c) \sum_{i\notin\{k,\ell\}} \left(a_{ik}^2 + a_{i\ell}^2\right).$$

Dabei bezeichne $J_{k\ell} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die in die Identität eingebettete Jacobi-Rotationsmatrix und c den entsprechenden Diagonaleintrag.
Bemerkung: Der Diagonaleintrag $c = (1+t^2)^{-1/2}$ hängt vom Parameter t ab, für dessen Wahl es nach (3.20) zwei Möglichkeiten gibt. Mit der im Lemma bewiesenen Identität können effizient beide Möglichkeiten getestet und diejenige gewählt werden, für die sich eine kleinere Norm ergibt.

Aufgabe 3. (Konvergenz des Extrapolationsverfahrens)

Vorbereitend auf Aufgabe 4 ist das Ziel dieser Aufgabe, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz. Sei $T : (0, h_0] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $h_0 > h_1 > \ldots > h_n > 0$. Angenommen, es existieren $q \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $c > 0$ mit

$$T(h) = T^* + \sum_{i=1}^{n} a_i h^{qi} + a_{n+1}(h),$$

so dass $|a_{n+1}(h)| \leq c\, h^{q(n+1)}$. Es sei T_n der Wert an der Stelle 0 des Interpolationspolynoms durch die Punkte $(h_0^q, T(h_0)), (h_1^q, T(h_1)), \dots, (h_n^q, T(h_n))$. Gilt $h_{k+1} \leq \rho\, h_k$, $k = 0, \dots, n-1$, für ein $\rho < 1$, dann gilt

$$|T_n - T^*| \leq \tilde{c}\, h_0^q \cdot h_1^q \cdot \ldots \cdot h_n^q,$$

wobei $\tilde{c}$ nur von c, q und ρ abhängt.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, dass $h_{k+1} = \rho h_k$, $k = 0, \dots, n-1$. Setze $z_k = h_k^q$. Das Interpolationspolynom für $(z_0, T(h_0)), \dots, (z_n, T(h_n))$ hat die Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} T(h_k) L_k(z), \quad L_k(z) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{z - z_i}{z_k - z_i}. \tag{1}$$

Zeige folgende Hilfsaussagen:

a) Sei $p \in \Pi_n,\ p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ mit positiven Nullstellen $x_1, \dots, x_n$. Dann sind die c_k alternierend, d.h. $c_k c_{k+1} < 0$, $0 \leq k < n$.

b) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} z_k^i L_k(0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

c) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} z_k^{n+1} |L_k(0)| \leq c' \prod_{k=0}^{n} z_k,$$

mit $c' := \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+\rho^{qi}}{1-\rho^{qi}}$.

d) Zeige mit diesen Hilfsaussagen, dass

$$T_n = T^* + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{k=1}^{n} L_k(0) a_{k+1}(h_k)$$

und $|T_n - T^*| \leq c \prod_{k=0}^{n} z_k$ gilt.

□

Aufgabe 4. (Romberg-Verfahren)

Die Idee des Romberg-Verfahrens ist, die zusammengesetzte Trapezregel Q_h^{Trapez} für verschiedene Gitterweiten $h_0 > h_1 > \cdots > h_n > 0$ anzuwenden und anschließend den Wert an der Stelle $h = 0$ zu extrapolieren, indem das Interpolationspolynom durch die Punkte $(h_0^q, Q_{h_0}^{\text{Trapez}}), (h_1^q, Q_{h_1}^{\text{Trapez}}), \dots, (h_n^q, Q_{h_n}^{\text{Trapez}})$ an der Stelle 0 ausgewertet wird.
Es sei $f \in C^{2(n+1)}[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{m}$, $m \in \mathbb{N}$ und $x_j = a + j \cdot h$, $j = 0, \dots, m$.
Es seien die Bernoulli-Polynome gegeben durch $B_0(t) := 1$ und

$$B_k'(t) := k B_{k-1}(t), \quad \int_0^1 B_k(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad k \geq 1.$$

a) Zeige:

i) $B_k(0) = B_k(1)$, $k \geq 2$,

ii) $B_k(t) = (-1)^k B_k(1-t)$, $k \geq 0$,

iii) $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = B_{2k+1}(1) = 0$, $k \geq 1$.

b) Es sei $\varphi \in C^{2n}[0,1]$. Zeige, dass gilt

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\varphi(0)+\varphi(1)) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)!} B_{2k}(\varphi^{(2k-1)}(1) - \varphi^{(2k-1)}(0)) + \int_0^1 \frac{1}{(2n)!} B_{2n}(t)\varphi^{(2n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit $\varphi_j(t) := hf(x_j + th)$ gilt $\varphi_j(1) = \varphi_{j+1}(0) = hf(x_{j+1})$,

$$\int_0^1 \varphi_j(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \varphi_j^{(k)}(t) = h^{k+1} f^{(k)}(x_j + th),$$

woraus $\varphi_j^{(2k-1)}(1) = \varphi_{j+1}^{(2k-1)}(0)$ folgt.

c) Zeige, dass gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h}{2}(f(x_j) + f(x_{j+1})) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k}(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) + h^{2n+1} \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^1 \frac{1}{(2n)!} B_{2n}(t) f^{(2n)}(x_j + th)\,\mathrm{d}t.$$

d) Zeige, dass

$$|h \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^1 \frac{1}{(2n)!} B_{2n}(t) f^{(2n)}(x_j + th)\,\mathrm{d}t| \leq \frac{b-a}{(2n)!} \|B_{2n}\|_\infty \left\| f^{(2n)} \right\|_{\infty,[a,b]}$$

gilt und folgere, dass die Voraussetzungen für den Satz in Aufgabe 3 mit $q = 2$ erfüllt sind.