



Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu



Übungsblatt 2.

Abgabe am **21.10**, vor der Vorlesung.

Aufgabe 5. (Hermite–Polynome)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ werden die *Hermite–Polynome* durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

definiert. Zeigen Sie:

- a) Die Hermite–Polynome genügen für $n \in \mathbb{N}$ der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

mit $H_0(x) = 1$ und $H_1(x) = 2x$. (Damit ist klar, dass H_n ein Polynom vom Grad n ist.)

Hinweis: Verwenden Sie die Produktregel für die n -te Ableitung,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- b) Für die Ableitung von H_n gilt $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

- c) Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

sind die Orthonormalpolynome zum Gewicht $\omega(x) = e^{-x^2}$ auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$.

Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(8 Punkte)

Aufgabe 6. (Clenshaw-Algorithmus)

Eine Polynomfunktion $p_n \in \Pi_n$ auf $[-1, 1]$ sei in der Entwicklung

$$p_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i$$

mit den bekannten Chebyshev-Polynomen T_i gegeben. Es seien $x \in [-1, 1]$ und rekursiv

$$\beta_n := \alpha_n, \quad \beta_{n-1} := \alpha_{n-1} + 2x\beta_n, \quad \beta_i := \alpha_i + 2x\beta_{i+1} - \beta_{i+2} \text{ für } i = n-2, \dots, 1.$$

Zeigen Sie, dass

$$p_n(x) = \alpha_0 + x\beta_1 - \beta_2$$

Hinweis: Die Entwicklung in den α_i ausschreiben und die Dreitermrekursion der T_i verwenden.

(3 Punkte)

Programmieraufgabe 4. (Clenshaw-Algorithmus implementiert)

a) Implementieren Sie den Algorithmus aus Aufgabe 6 zur Auswertung von

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i(x)$$

mit Python/NumPy.

- b) Achten Sie dabei darauf, dass auch Eingaben x vom Typ `array` zugelassen werden können. Insbesondere soll NumPy Funktionalität zur Auswertung von p_n an mehreren Stellen gleichzeitig verwendet werden.
- c) Implementieren Sie damit ausgehend eine Funktion, die einen Plot der Chebyshev-Polynome T_i für $i \in \{0, \dots, n\}$ erstellt. Das Bild soll insbesondere Achsenbeschriftungen, Titel und eine Legende enthalten.
- d) Implementieren Sie eine Funktion, die zu x den absoluten Fehler in der numerischen Auswertung der Entwicklung

$$p_6(x) = \frac{5}{16}T_0 + \frac{15}{32}T_2 + \frac{3}{16}T_4 + \frac{1}{32}T_6$$

mit dem Clenshaw Algorithmus ausgibt.

Ein Rohgerüst für diese Aufgabe stellen wir auf der Website der Vorlesung zur Verfügung.
(5 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe am 20-22.10. im CIP Pool, Wegelerstraße 6.