Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu

universitätbonn

Übungsblatt 3.

Abgabe am **28.10, vor der Vorlesung**.

Aufgabe 7. (Gradientenverfahren)

Betrachten Sie das Gradientenverfahren zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a \gg 1$ eine Konstante sei.

a) Der Startvektor sei $x_0 = (a, 1)^T$. Bestimmen Sie die erste Suchrichtung d_0, den ersten Skalar α_0 sowie die erste Iterierte x_1.

b) Sei $x_k = (x_k^1, x_k^2)^T$ die k-te Iterierte. Zeigen Sie $x_{k+1}^1 = \rho x_k^1$ und $x_{k+1}^2 = -\rho x_k^2$. Wie lautet ρ?

c) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_2(A)$ der Matrix A. Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$\left\| x_k - A^{-1}b \right\|_A \leq \left(\frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1} \right)^k \left\| x_0 - A^{-1}b \right\|_A$$

der Konvergenzgeschwindigkeit scharf ist, d.h. dass in der Ungleichung auch Gleichheit vorkommen kann.

d) Zeigen Sie $d_{k+1}^T d_k = 0$ und $d_{k+2} = \beta_k d_k$. Wie lautet β_k?

e) Der Winkel φ zweier Vektoren x und y gemessen in der Energienorm ist definiert durch

$$\cos\varphi = \frac{x^T A y}{\|x\|_A \|y\|_A} \text{ mit } \|x\|_A = \sqrt{x^T A x}.$$

Zeigen Sie, dass in der Energienorm d_k und d_{k+1} fast parallel sind, d.h. d_k und d_{k+1} schließen einen kleinen Winkel φ ein.

(6 Punkte)

Aufgabe 8. (B-Splines Gram-Matrix)

Die folgende Aufgabe dient der Wiederholung und Bereitstellung einer nichttrivial interessanten Matrix für die schon bekannten und in Zukunft vorgestellten Algorithmen aus der Vorlesung.

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ und Knoten $t_i \leq t_{i+1}, i = 0, \ldots, n$. Die B-Splines $N_{i,0}(x), i = 0, \ldots, n-1$ vom Grad 0 sind die Funktionen

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Die B-Splines $N_{i,p}, i = 0, n-p-1$ vom Grad $p > 0$ genügen der Rekursionsformel

$$N_{i,p}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(x) + \frac{t_{i+p+1} - x}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(x) ,$$

mit der Konvention, dass Summanden mit $t_{i+p} = t_i$ bzw. $t_{i+p+1} = t_{i+1}$ wegfallen.
Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall $t_i = ih \in [0,1], i = 0, \ldots, n$, $h = \frac{1}{n}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$N_{i,2}(x) = f\left(\frac{x - t_i}{h}\right) \qquad \text{mit} \qquad f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y^2 & y \in [0,1) \\ \frac{1}{2}\left(-2y^2 + 6y - 3\right) & y \in [1,2) \\ \frac{1}{2}\left(y^2 - 6y + 9\right) & y \in [2,3) \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

b) Berechnen Sie $\langle N_{i,2}, N_{j,2} \rangle$ für $i, j = 0, \ldots, n-3$ zum Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$.

c) Skizzieren Sie damit die Besetzungsstruktur der Gram-Matrix zu den $N_{i,2}$.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 5. (B-Splines Programm, Teil 1)

Nun beginnen wir damit, das letzte Beispiel in Programmstücke umzubauen.

a) Implementieren Sie eine Funktion zur Auswertung eines B-Splines $N_{i,p}$ zu beliebigen (!) Knoten $t_i \leq t_{i+1}$. Beachten Sie hierbei besonders die Konvention für den Fall $t_{i+p} = t_i$ bzw. $t_{i+p+1} = t_{i+1}$.

b) Erstellen Sie damit für $p = 0, \ldots, 3$ Plots der B-Splines $N_{i,p}$ zu den Knoten

$$(t_i) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{p+1 \text{ mal}}, h, 2h, 3h, 4h, 5h, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p+1 \text{ mal}}) \qquad \text{mit} \qquad h = \frac{1}{6}$$

c) Finden Sie ein Kommando zur Darstellung der Besetzungsstruktur. Erstellen Sie eine Funktion, die zu gegebenem n die Gram-Matrix zu den $N_{i,2}$ aus der vorherigen Aufgabe konstruiert und deren Besetzungsstruktur darstellt. Hinweis: `diag` bzw. `spdiags`.

Ein Rohgerüst der Aufgabe stellen wir wieder auf der Website zur Verfügung.

(5 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe am 03-05.11. im CIP Pool, Wegelerstraße 6.