Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu

Übungsblatt 5.

Abgabe am **11.11, vor der Vorlesung**.

Am 18.11 um 18 Uhr findet im großen Hörsaal eine Vollversammlung aller Mathematikstudierenden statt, organisiert durch die Fachschaft Mathematik. Zentrale Themen werden sein: Interimsmensa, Verbesserung der Prüfungsordnung und Orts-NC. Nähere Informationen findet ihr in den Glaskästen im Nebengebäude sowie auf `http://fsmath.uni-bonn.de`. Erscheint zahlreich!

Aufgabe 12. (CG-Verfahren von Hand)
Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

mit Hilfe des Verfahrens der konjugierten Gradienten mit dem Startvektor $(0,0)^T$ von Hand.

(4 Punkte)

Aufgabe 13. ((Klassische) Iterationsverfahren als Krylovraumverfahren)
Rufen Sie sich die klassischen Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme aus der Algorithmischen Mathematik 2 in Erinnerung.

a) Zeigen Sie, dass die Iterierten des Richardson-Verfahrens in einem Krylovraum liegen.

b) Liegen die Iterierten des Jacobi-Verfahrens für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

in einem Krylovraum? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Kann für eine allgemeine Matrix A das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ so modifiziert werden, dass die Iterierten des Jacobi Verfahrens in einem Krylovraum liegen?

(3 Punkte)

Aufgabe 14. (Tridiagonalhessenberg)
Es sei A eine hermitesche Matrix und Q eine unitäre Matrix. Zeigen Sie, dass die Hessenberg-Form (i.e. rechte obere Dreiecksmatrix bis auf erste untere Nebendiagonale) $H = Q^* AQ$ der Matrix A eine Tridiagonalmatrix ist.

(3 Punkte)

Programmieraufgabe 7. (GMRES, Teil 1, QR-Zerlegung)

Als ersten Schritt in der Implementierung von GMRES wiederholen und implementieren wir die QR-Zerlegung $A = QR$ einer Matrix in eine unitäre Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Auf der Vorlesungsseite stellen wir ein Rohgerüst und einen Datensatz für die letzte Teilaufgabe zur Verfügung.

a) Implementieren Sie die Rückwärtssubsitution zum Lösen von Gleichungssystemen $Rx = b$ mit oberer Dreiecksmatrix R.

b) Implementieren Sie die QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen.

c) Bestimmen Sie damit die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -21 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

und die Lösung von $Ax = b$ mit $b^T = (-78, 136, -79)$.

d) Bauen Sie nun aus den vorhandenen Teilen eine Funktion zur Berechnung der Regressionsgeraden $ax+b$ an gegebene Datenpunkte x_i, y_i. Auf der Vorlesungswebsite stellen wir Ihnen einen Datensatz zur Verfügung (das Einlesen übernimmt das bereitgestellte Rohgerüst). Plotten Sie die Datenpunkte und die zugehörige Regressionsgerade für die Datenpaare x_i, y_i, als auch x_i, z_i (siehe Rohgerüst und Datensatz).

(6 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe am 17-19.11. im CIP Pool, Wegelerstraße 6.