



# Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015  
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer  
Sa Wu



## Übungsblatt 6.

Abgabe am **18.11**, vor der Vorlesung.

**Aufgabe 15.** (ARNOLDI-Verfahren für schiefssymmetrische Matrizen)

Das ARNOLDI-Verfahren entspricht einer Orthogonaltransformation  $H_m = V_m^T A V_m$  von  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in eine obere Hessenbergmatrix  $H_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Es sei nun  $A$  schiefssymmetrisch, d.h.  $A^T = -A$ . Welche Vereinfachungen ergeben sich daraus für die Arnoldi-Iteration? Geben Sie den Algorithmus an.

(3 Punkte)

**Aufgabe 16.** (Invarianzeigenschaften des LANCZOS-Verfahrens)

Zeige die folgenden Eigenschaften des Verfahrens!

- Das LANCZOS-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix  $A - \sigma I$  für beliebiges  $\sigma \in \mathbb{C}$  bei gleichem Startvektor  $x_0$  stets dieselbe Matrix  $W_k$ .
- Das LANCZOS-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix  $A$  mit Startvektor  $x_0$  dieselbe Tridiagonalmatrix  $T_k$  wie für die Matrix  $Q^H A Q$  mit Startvektor  $Q^H x_0$ , solange  $Q$  unitär ist.

Was folgt aus (b) für die theoretische Analyse des Verfahrens?

(5 Punkte)

**Aufgabe 17.** (CG-Verfahren bei semidefinitem  $A$ )

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch, positiv-semidefinit,  $b \in \text{Ran}(A) = A(\mathbb{R}^n)$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

- Zeige, dass alle im Laufe des CG-Verfahrens konstruierten Suchrichtungen  $p_0, \dots, p_m$  ebenfalls im Bild von  $A$  liegen.
- Folgern Sie daraus, dass für  $Ap_j \neq 0$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ , die Ungleichung  $(Ap_j, p_j) > 0$  gilt, dass also das CG-Verfahren auch im positiv-semidefiniten Fall durchführbar ist.

(4 Punkte)

**Programmieraufgabe 8.** (GMRES, Teil 2)

Im folgenden wagen wir uns mit Programmieraufgabe 7 an eine erste Implementierung des GMRES Verfahrens.

- Implementieren Sie das GMRES Verfahren.
- Verwenden Sie dabei die QR Zerlegung aus Programmieraufgabe 7 zum Lösen des Ausgleichsproblems im letzten Schritt des GMRES Verfahrens.
- Fügen Sie den Konvergenzplots aus Programmieraufgabe 6 Daten zur GMRES Lösung hinzu.
- Vergessen Sie dabei nicht auf Achsenbeschriftungen und Legende.

(4 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe am 17-19.11. im CIP Pool, Wegelerstraße 6.