



Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu



Übungsblatt 6.

Abgabe am **18.11**, vor der Vorlesung.

Aufgabe 15. (ARNOLDI-Verfahren für schiefsymmetrische Matrizen)

Das ARNOLDI-Verfahren entspricht einer Orthogonaltransformation $H_m = V_m^T A V_m$ von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in eine obere Hessenbergmatrix $H_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Es sei nun A schiefsymmetrisch, d.h. $A^T = -A$. Welche Vereinfachungen ergeben sich daraus für die Arnoldi-Iteration? Geben Sie den Algorithmus an.

(3 Punkte)

Aufgabe 16. (Invarianzeigenschaften des LANCZOS-Verfahrens)

Zeige die folgenden Eigenschaften des Verfahrens!

- Das LANCZOS-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix $A - \sigma I$ für beliebiges $\sigma \in \mathbb{C}$ bei gleichem Startvektor x_0 stets dieselbe Matrix W_k .
- Das LANCZOS-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix A mit Startvektor x_0 dieselbe Tridiagonalmatrix T_k wie für die Matrix $Q^H A Q$ mit Startvektor $Q^H x_0$, solange Q unitär ist.

Was folgt aus (b) für die theoretische Analyse des Verfahrens?

(5 Punkte)

Aufgabe 17. (CG-Verfahren bei semidefinitem A)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv-semidefinit, $b \in \text{Ran}(A) = A(\mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- Zeige, dass alle im Laufe des CG-Verfahrens konstruierten Suchrichtungen p_0, \dots, p_m ebenfalls im Bild von A liegen.
- Folgern Sie daraus, dass für $Ap_j \neq 0$, $j = 0, \dots, m-1$, die Ungleichung $(Ap_j, p_j) > 0$ gilt, dass also das CG-Verfahren auch im positiv-semidefiniten Fall durchführbar ist.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 8. (GMRES, Teil 2)

Im folgenden wagen wir uns mit Programmieraufgabe 7 an eine erste Implementierung des GMRES Verfahrens.

- Implementieren Sie das GMRES Verfahren.
- Verwenden Sie dabei die QR Zerlegung aus Programmieraufgabe 7 zum Lösen des Ausgleichsproblems im letzten Schritt des GMRES Verfahrens.
- Fügen Sie den Konvergenzplots aus Programmieraufgabe 6 Daten zur GMRES Lösung hinzu.
- Vergessen Sie dabei nicht auf Achsenbeschriftungen und Legende.

(4 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe am 17-19.11. im CIP Pool, Wegelerstraße 6.