Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu

universitätbonn

Übungsblatt 7.

Abgabe am **25.11, vor der Vorlesung**.

Aufgabe 19. (Vorkonditionierung: Zeilenäquilibrierung)

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt zeilenäquilibriert, falls gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}| = 1$ für alle $j = 1, \dots, n$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zeilenäquilibriert und regulär. Dann gilt für jede reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Abschätzung $\operatorname{cond}_\infty(A) \le \operatorname{cond}_\infty(DA)$.

b) Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiere die Diagonalmatrix $T := \operatorname{diag}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})$ mit $\alpha_j = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}|$. Dann gilt $\operatorname{cond}_\infty(TA) \le \operatorname{cond}_\infty(A)$.
(Hinweis: b) folgt aus a) durch Verwendung einer geeigneten Diagonalmatrix.)

(3 Punkte)

Aufgabe 20. (GMRES – ein Beispiel)

Der Vektor $x^* = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ löst das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass das GMRES-Verfahren mit $x_0 = 0$ die Iterierten $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ und $x_n = x^*$ liefert.

(5 Punkte)

Aufgabe 21. (Eigenwerte und Eigenvektoren von Tridiagonalmatrizen)
Es sei $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Tridiagonalmatrix mit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \beta\gamma > 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lambda_k = \alpha + 2\sqrt{\beta\gamma}\,\mathrm{sgn}(\beta)\cos(\frac{k\pi}{n+1}),\ 1 \le k \le n$$

die Eigenwerte zu den Eigenvektoren

$$[v_k]_l = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{l-1}{2}} \sin\left(\frac{kl\pi}{n+1}\right)$$

sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 22. (Spektraläquivalenz)
Zwei Folgen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ positiv definiter Matrizen $A_n, B_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, heißen spektraläquivalent, falls für jedes n Konstanten $\gamma_n, \Gamma_n > 0$ mit $\Gamma_n/\gamma_n < c$ existieren, sodass

$$\gamma_n(x, B_n x) \le (x, A_n x) \le \Gamma_n(x, B_n x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{C}^n$$

gilt. Dabei darf c nicht von n abhängen.
Zeige, dass $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann spektraläquivalent sind, wenn eine Konstante $\tilde{c}$ existiert, sodass

$$\frac{\lambda_{\max}\left(A_n B_n^{-1}\right)}{\lambda_{\min}\left(A_n B_n^{-1}\right)} \le \tilde{c} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(5 Punkte)