Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu

universitätbonn

Übungsblatt 8.

Abgabe am **02.12, vor der Vorlesung**.

Aufgabe 24. (Gerschgorin Kreise, Rayleigh-Quotient)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie Einschließungen für die Eigenwerte von A an (Gerschgorin). Ist A positiv definit?

b) Es seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ die Eigenwerte von A. Zeigen Sie, daß $\lambda_1 \leq 2$ und $\lambda_4 \geq 4$ gelten. (**Hinweis:** Rayleigh–Quotient).

(4 Punkte)

Aufgabe 25. (Folgerungen aus dem Satz von Gerschgorin)

a) Geben Sie mithilfe des Satzes von Gerschgorin und Transformationen der Form $A \mapsto D^{-1}AD$ mit einer Diagonalmatrix D eine möglichst gute Lokalisierung (d.h. kleiner Radius des enthaltenden Kreises) der Eigenwerte von

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 10^{-5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

an.

b) Es seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix und G_j, $j = 1, \ldots, n$, die zu dieser Matrix gehörenden Gerschgorin-Kreise. Für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei G_i disjunkt zu allen anderen Kreisen. Zeigen Sie, dass genau ein Eigenwert von A in G_i liegt und dass zu diesem ein Eigenvektor x existiert mit $x_i = 1$ und $|x_j| < 1$ für alle $j \neq i$.

c) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch und $\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| < a_{ii}$ für alle i, dann ist A positiv definit.

(6 Punkte)

Aufgabe 26. (Quadratwurzel positiv semidefiniter Matrizen)
Als Wurzeln einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ bezeichnet man alle Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, die mit sich selbst multipliziert A ergeben:

$$A = B^2 \quad \Longleftrightarrow \quad B \text{ ist Wurzel von } A.$$

Es seien $A, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitesche Matrizen und A sei zusätzlich positiv (semi)definit. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Es existiert eine Quadratwurzel von A, die ebenfalls positiv (semi)definit ist.

b) Alle Eigenwerte von AC sind reell.

c) Ist A positiv definit, so ist AC diagonalisierbar.

Bemerkung: Das Produkt beliebiger hermitescher Matrizen hingegen ist im Allgemeinen nicht einmal diagonalisierbar, geschweige denn hermitesch.

(6 Punkte)