Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu

universitätbonn

Übungsblatt 9.

Abgabe am **09.12, vor der Vorlesung**.

Aufgabe 27. (Rayleigh-Quotient)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und (λ, x) ein zu A gehörendes Eigenpaar. Zeigen Sie für den Rayleigh-Quotienten μ_A folgende Störungseigenschaften: Es gilt

a) $|\mu_A(x+h) - \mu_A(x)| = \mathcal{O}(\|h\|)$ für $h \to 0$,

b) $|\mu_A(x+h) - \mu_A(x)| = \mathcal{O}(\|h\|^2)$ für $h \to 0$, falls A hermitesch ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 28. (Kondition des Eigenwertproblems)

Ein gut konditioniertes Problem ist die Bestimmung der Eigenwerte der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Berechnung der Koeffizienten $q(a,b,c) = -(a^2+b^2+c^2)$ und $r(a,b,c) = -2abc$ des charakteristischen Polynoms $P(x) = x^3 + qx + r$ ein gut konditioniertes Problem (bezüglich der relativen Konditionszahlen) ist.

b) Zeigen Sie, dass die Berechnung der Nullstellen $\lambda_1(q,r)$, $\lambda_2(q,r)$ und $\lambda_3(q,r)$ von $P(x)$ hingegen extrem schlecht konditioniert sein kann. Betrachten Sie hierzu die (implizite) Ableitung von $P(\lambda_i(q,r)) = 0$ für $1 \leq i \leq 3$.

Wiederholung: Sei $y(x_1, \dots, x_n)$ die zu berechnende Problemstellung. Dann sind die *absoluten Konditionszahlen* $\delta_i = \partial y(x_1, \dots, x_n)/\partial x_i$ und die *relativen Konditionszahlen* $\rho_i = \delta_i x_i / y(x_1, \dots, x_n)$. Die relativen Konditionszahlen stellen die Verstärkungsfaktoren für die relativen Fehler dar und geben somit den unvermeidlichen Verlust an gültigen Dezimalen bei der Berechnung der Problemstellung an. Sind die Konditionszahlen klein, so spricht man von einem *gut konditionierten Problem*, andernfalls von einem *schlecht konditionierten Problem*. Bei schlecht konditionierten Problemen bewirken kleine relative Fehler in den Eingabedaten große relative Fehler in den Ausgabedaten.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 10. (Eigenwerte, Teil 1)

Wir widmen uns wieder der Gramschen Matrix $N_{n,2} \in \mathbb{R}^{n-2\times n-2}$ aus Programmieraufgaben 5, 6, 8. Diesmal verwenden wir sie, um einige Aspekte von Eigenwertproblemen näher kennen zu lernen. Ein Rohgerüst unter Verwendung einiger der vorhergehenden Aufgaben stellen wir auf der Vorlesungswebsite zur Verfügung.

a) Implementieren Sie eine Funktion, die zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Gerschgorin Kreise

$$\bigcup_{i\in n}\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j\in n, j\neq i} |a_{i,j}|\} \cap \bigcup_{i\in n}\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j\in n, j\neq i} |a_{j,i}|\}$$

in der Einbettung von $\mathbb{C}$ im $\mathbb{R}^2$ darstellt.

b) Implementieren Sie eine Funktion, die zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times N}$, das einschließende Rechteck nach dem Satz von Bendixson

$$W(A_0) + \mathrm{i}W(A_1)$$

zeichnet. Dabei sind

$$A_0 = \frac{1}{2}\left(A + A^H\right) \ , \qquad A_1 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(A - A^H\right) \ , \qquad W(B) = [\lambda_n(B), \lambda_1(B)] \ ,$$

wobei $\lambda_n(B), \lambda_1(B)$ den kleinsten und größten Eigenwert einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnen. Dabei können Sie $W(A_0), W(A_1)$ ebenfalls mit dem Satz von Gerschgorin abschätzen.

c) Erstellen Sie für $n = 12, 22$ Plots zur Matrix $N_{n,2}$, die die Gerschgorin Kreise, Diagonaleinträge und Bendixson-Rechtecke enthalten.

d) Implementieren Sie die Vektoriteration und inverse Vektoriteration.

e) Erstellen Sie damit einen Plot der Iterierten bis zur Toleranz 10^{-7} zum dominanten Eigenwert von $N_{n,2}$ zu den angegebenen n. Verwenden Sie dabei für die inverse Iteration den Shift $\mu = \frac{1}{10}$.

(8 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe am 15-17.12. im CIP Pool, Wegelerstraße 6.