Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu

universitätbonn

Übungsblatt 10.

Abgabe am **16.12, vor der Vorlesung**.

Aufgabe 29. (Symmetrische Matrizen und Eigenwerte)

Symmetrische Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vom Rang 1 lassen sich allgemein durch $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ mit einem Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ beschreiben. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 30. (Eigenwerte)

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist A reell, so ist $\overline{\lambda}$ Eigenwert von A.

(ii) Ist A selbstadjungiert, so sind die Eigenwerte von A reell.

(iii) Ist A regulär, so ist λ^{-1} Eigenwert von A^{-1}.

b) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Matrizen mit Eigenwerten λ und μ. Unter welchen Voraussetzungen ist $\lambda\mu$ Eigenwert von AB?

c) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ -6 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie alle Eigenwerte von A. Wieviele Iterationsschritte werden mit dem Abstiegs- bzw. CG-Verfahren benötigt, um eine Approximationslösung von $Ax = b$ zu erhalten, deren Abweichung von der exakten Lösung x^* nur noch 1% des Anfangsfehlers $||x_0 - x^*||_A$ beträgt.

(6 Punkte)

Aufgabe 31. (Orthogonale Iteration — Konvergenzbeweis)

Eine Verallgemeinerung der Vektoriteration stellt das sog. Verfahren der orthogonalen Iteration dar. Ein möglicher Algorithmus lautet:

> Gegeben sei eine Startmatrix $X_0 \in \mathbb{C}^{n\times p}$ mit $X_0^H X_0 = I$.
> `For` $k = 1, 2, \ldots$ {
> $Y_k := AX_{k-1}$;
>   berechne eine QR-Zerlegung $X_k R_k = Y_k$;
> }

Damit ist $Y_k \in \mathbb{C}^{n\times p}$, $X_k \in \mathbb{C}^{n\times p}$ sowie $R_k \in \mathbb{C}^{p\times p}$, und es gilt $X_k^H X_k = I \in \mathbb{C}^{p\times p}$, d.h., die (reduzierte) QR-Zerlegung ersetzt den Normierungsschritt.

Es sei $\mathcal{X}_k := X_k(\mathbb{C}^n)$ der von den Spalten von X_k aufgespannten Unterraum. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass unter vernünftigen Voraussetzungen die Folge $\{\mathcal{X}_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den A-invarianten Unterraum $\mathcal{V}_p := V_p(\mathbb{C}^n)$ mit $V_p := (v_1, \ldots, v_p)$, aufgespannt von Eigenvektoren zu den p betragsgrößten Eigenwerten, konvergiert.
Zeige im Beweis des folgenden Satzes die Teilaussagen (a) – (e).

Satz Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten

$$|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0.$$

Für die Startmatrix gelte $X_0^H X_0 = I$ sowie $\mathcal{X}_0 \cap \operatorname{span}\{v_{p+1}, \ldots, v_n\} = \{0\}$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, sodass mit $q := |\lambda_{p+1}/\lambda_p|$

$$d(\mathcal{X}_k, \mathcal{V}_p) \leq c \cdot q^k$$

für alle hinreichend großen k.

Beweis Gezeigt wird auf direktem Weg die Abschätzung $\|P_{\mathcal{X}_k} - P_{\mathcal{V}_p}\|_2 \leq cq^k$.

a) Zunächst einmal gilt $\mathcal{X}_k = A^k \cdot \mathcal{X}_0$. (Beweis durch vollständige Induktion)

Es seien $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{C}^n$ die Spalten von X_0. Da die Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{C}^n$ bilden, besitzt jede Spalte eine Darstellung der Form

$$x_i = \sum_{j=1}^{p} c_{ij} v_j + t_i, \quad t_i = \sum_{j=p+1}^{n} d_{ij} v_j \in \operatorname{span}\{v_{p+1}, \ldots, v_n\}, \quad i = 1, \ldots, p,$$

d. h., es ist $X_0 = V_p C^T + T_p$ mit $C = (c_{ij}) \in \mathbb{C}^{p\times p}$ und $T_p := (t_1, \ldots, t_p)$.

b) Die Koeffizientenmatrix C ist regulär.

Wegen $\tilde{X}_0 := X_0 C^{-T} = V_p + \tilde{T}_p$ kann jede Spalte von X_0 o. B. d. A. in der Form

$$x_i = v_i + t_i, \quad t_i \in \operatorname{span}\{v_{p+1}, \ldots, v_n\},$$

dargestellt werden (d.h., im folgenden wird das C^T einfach weggelassen).

c) Durch $\{w_1^{(k)}, \ldots, w_p^{(k)}\}$, $w_i^{(k)} := v_i + \lambda_i^{-k} A^k t_i$, ist eine Basis von $\mathcal{X}_k$ gegeben.
d) Damit gilt $\|w_i^{(k)} - v_i\|_2 \leq \hat{c} q^k$ mit einer von k unabhängigen Konstante $\hat{c}$.
e) Für die entsprechenden Matrizen $W_p^{(k)} := (w_1^{(k)}, \ldots, w_p^{(k)})$ und V_p gilt dann

$$\|W_p^{(k)} - V_p\|_2 \leq \hat{c} q^k \sqrt{p}.$$

(*Hinweis*: Definition der Matrixnorm; Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Die Behauptung schließlich folgt aus

$$\|W_p^{(k)}\big((W_p^{(k)})^H W_p^{(k)}\big)^{-1}(W_p^{(k)})^H - V_p\big(V_p^H V_p\big)^{-1} V_p^H\|_2 \leq \bar{c}\|W_p^{(k)} - V_p\|_2$$

für hinreichend großes k. □

(8 Punkte)