Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **08.01, vor der Vorlesung**.

> Dieses Blatt enthält etwas mehr Aufgaben und dient vorwiegend der Wiederholung des Stoffs vor der vorlesungsfreien Winterpause (24.12–06.01). Aufgrund der Winterpause fällt die Abgabe der Nichtprogrammieraufgaben auf Donnerstag, 08.01.2015.

Aufgabe 32. (Berechnung von Orthogonalpolynomen)
Gegeben sei die Gewichtsfunktion

$$\omega(x) = 1 + x^2 .$$

Berechnen Sie die Orthogonalpolynome ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 bezüglich des Innenprodukts

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \omega(x) \, dx .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 33. (Gradienten-Verfahren)
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Iterierten x_1 und x_2 des Gradienten-Verfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für den Startwert x_0.

b) Ermitteln Sie die Konvergenzgeschwindigkeit des Gradienten-Verfahrens bei der Lösung von $Ax = b$.

(4 Punkte)

Aufgabe 34. (CG-Verfahren)
Die Matrix $\mathbf{A}$ und der Vektor $\mathbf{b}$ seien von der Form

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Führen Sie zwei Iterationsschritte des cg–Verfahrens ausgehend von der Startnährung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zur Lösung des Gleichungssytems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ durch.

(4 Punkte)

Aufgabe 35. (Vektoriteration für hermitesche Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ und zugehörigen normierten Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$. Mithilfe des Algorithmus für das Verfahren der Vektoriteration berechnet man eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Näherungen an v_1. Zeige Sie, dass mit $q := |\lambda_2/\lambda_1|$

$$|\mu_A(x_k) - \lambda_1| = \mathcal{O}(q^{2k})$$

gilt!

Hinweis: Für hermitesche Matrizen bilden die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis.

(4 Punkte)

Programmieraufgabe 11. (Eigenwerte, Teil 2)

Wir ergänzen nun die Bilder mit den Eigenwerteinschließungen aus Programmieraufgabe um die tatsächlichen Eigenwerte.

a) Schreiben Sie eine Funktion, die die Matrix A mittels Householder-Reflexionen auf eine ähnliche Matrix $H = QAQ^T$ in oberer Hessenberg-Form transformiert. Achten Sie dabei darauf, dass dies in $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen geschieht.

b) Implementieren Sie die QR-Zerlegung für eine Matrix H in oberer Hessenberg-Form mittels Givens-Rotationen. Beachte Sie dabei die bereits vorliegende Gestalt von H aus Teil (a). Hierfür sind nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen nötig.

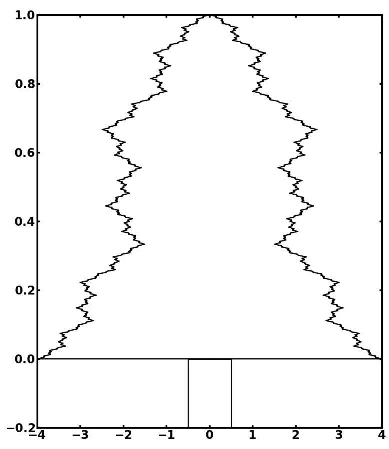
c) Erstellen Sie eine Routine zur Berechnung der Eigenpaare, die mithilfe der Funktionen aus (a) und (b) die QR-Iteration mit Shift aus der Vorlesung für A realisiert. Ein Rückgabeparameter soll aus einer Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von R_k bestehen, ein weiterer aus einer Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von A sind, die aus der orthogonalen Matrix Q mit $A = QR_kQ^T$ erhalten werden können.

d) Berechnen Sie damit die Eigenwerte der Testmatrizen aus Programmieraufgabe 9.

e) Fügen Sie den Bildern der Eigenwerteinschließungen nach Gerschgorin und Bendixson aus Programmieraufgabe 9 die Eigenwerte der jeweiligen Matrizen hinzu.

(16 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe am 19-21.01. im CIP Pool, Wegelerstraße 6.



Das Team von Einführung in die Grundlagen der Numerik wünscht Ihnen eine erholsame Winterpause.