Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **13.01, vor der Vorlesung**.

Aufgabe 36. (Givens-Rotationen)

a) Zeigen Sie, dass die orthogonalen 2×2-Matrizen die Form

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{mit } a^2 + b^2 = 1$$

haben.

b) Bekanntlich gilt für a, b mit $a^2 + b^2 = 1$, dass es genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt, so dass $a = \cos\varphi$ und $b = \sin\varphi$ sind. Damit haben die orthogonalen 2×2-Matrizen aus a.) die Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die durch diese beiden Typen definierten linearen Abbildungen $x \mapsto Ax$ geometrisch.

c) Betrachte die Matrix

$$A(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1.$$

Zeigen Sie, dass es zu einem beliebigen Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ eine Matrix $A(a, b)$ gibt, so dass

$$A(a, b)u = we_1, \quad w \in \mathbb{R},\ e_1 \text{ erster Einheitsvektor},$$

gilt. Geben Sie a, b und w an.

d) Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. Für $k, \ell \in \{1, \dots, n\}, k \leq \ell$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ definiere die orthogonale Matrix $P^{k,\ell} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$(P^{k,\ell})_{i,j} := \begin{cases} 1, & i = j, \text{ wobei } i \neq k, i \neq \ell, \\ a, & i = j = k \text{ oder } i = j = \ell, \\ -b, & i = k,\ j = \ell, \\ b & i = \ell,\ j = k, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

(*Givens-Rotation*). Erstellen Sie einen Algorithmus, mit dem man durch sukzessives Anmultiplizieren solcher Matrizen $P^{k,\ell}$ an A (von links) eine Dreiecksmatrix R enthält. Wie findet man damit eine QR-Zerlegung von A ?

(8 Punkte)

Aufgabe 37. (Aufwand QR-Verfahren)

Begründen Sie Ihre Antworten auf folgende Fragen.

a) Wie groß ist der Aufwand einer effizienten Anwendung (also unter Beachtung der bekannten Besetzungsstruktur) einer Givens Rotation?

b) Welche Zeilen/Spalten einer Matrix A ändern sich bei Anwendung einer Givens-Rotation $(P^{k,\ell})_{i,j}$ von links bzw. rechts?

c) Welcher Aufwand ergibt sich damit für die QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen einer vollbesetzten Matrix?

d) Welcher Aufwand ergibt sich damit für die QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen einer Matrix in obererer Hessenbergform?

e) Gegeben sei zu einem $v \in \mathbb{K}^n, \|v\| = 1$ eine Householder-Spiegelung $P = I - 2vv^T$, die auf einen Vektor $w \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ angewandt wird. Wie groß ist der Speicherbedarf und algorithmische Aufwand für eine effiziente Speicherung und Anwendung von P. Geben Sie dafür einen Algorithmus an (dh, die Klammerung der Rechenschritte).

f) Welcher Aufwand ergibt sich damit für die QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen einer vollbesetzten Matrix?

g) Welcher Aufwand ergibt sich damit für die QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen einer Matrix in oberer Hessenbergform?

h) Wie lautet der Gesamtaufwand des QR-Verfahrens mit Shift basierend auf einer Transformation in obere Hessenbergform mit Householder-Spiegelungen und QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen?

(8 Punkte)