



# Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015  
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer  
Sa Wu



## Übungsblatt 13.

Abgabe am **20.01**, vor der Vorlesung.

### Aufgabe 38. (Integrationsordnung von Quadraturformeln)

Wir widmen uns zur Einstimmung auf die numerische Integration einer Wiederholung von interpolatorischen Quadraturformeln und Orthogonalität von Polynomen. Wir erinnern uns, dass eine Quadraturformel  $I$  von der Ordnung  $p$  genannt wird, falls die Polynome vom Grad  $< p$  exakt integriert werden. Es seien  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  Stützstellen einer interpolatorischen Quadraturformel  $I$  zum Gewicht  $\omega \in (0, \infty)^{[a, b]}$ . Zu den Stützstellen sei die Polynomfunktion

$$p_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

gegeben. Beweisen Sie folgende Aussagen.

- $I$  hat höchstens Integrationsordnung  $2(n+1)$ . *Hinweis:*  $p_{n+1}^2$
- $I$  hat Integrationsordnung  $2(n+1)$  genau dann, wenn  $p_{n+1}$  bezüglich  $\omega$  senkrecht auf  $\Pi_n$  steht. *Hinweis:* Polynomdivision mit Rest.

(4 Punkte)

### Aufgabe 39. (Gauss-Hermite Quadratur)

Gegeben Sei das uneigentliche Integral

$$I[f; e^{-x^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx,$$

das durch eine  $m$ -punktige Gauß-Quadratur approximiert werden soll. Die Orthogonalpolynome zur Gewichtsfunktion  $\omega(x) = e^{-x^2}$  über  $\mathbb{R}$  sind die Hermite-Polynome (Aufgabe 4 auf Blatt 5 enthält Details).

Bestimmen Sie die ein- und zweipunktige Gauß-Hermite-Formel.

(4 Punkte)

### Aufgabe 40. (Gauss-Quadratur)

Gegeben sei die Gewichtsfunktion

$$\omega(x) = 1 + x^2.$$

Berechnen Sie Stützstellen und Gewichte für die 1,2,3-stufige Gauss-Quadratur-Formel für

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)\omega(x)dx.$$

(4 Punkte)

**Programmieraufgabe 12.** (Gauss-Christoffel Quadratur, Teil 1)

Es sei nun angenommen, zu einem vorgegebenen Gewicht  $\omega$  auf  $[a, b]$  seien für die zugehörigen orthogonalen Polynome  $p_k, k = 0, \dots, n$  die Koeffizienten der Dreitermrekursion

$$xp_k = \beta_{k-1}p_{k-1} + \alpha_k p_k + \beta_k p_{k+1}$$

bekannt.

- a) Implementieren Sie eine Funktion, die aus der Dreitermrekursion die Stützstellen der zugehörigen Quadraturformel, also die Nullstellen des orthogonalen Polynoms  $p_{n+1}$ , berechnet.
- b) Implementieren Sie eine Funktion, die die zugehörigen Quadraturgewichte nach Golub/Welsh berechnet.

(4 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe am 02-04.02. im CIP Pool, Wegelerstraße 6.