



Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu



Übungsblatt 14.

Abgabe am **27.01**, vor der Vorlesung.

Dieses ist das letzte bewertete Übungsblatt. Blatt 15 dient der Wiederholung und fließt nicht in die Zulassungsvoraussetzungen mit ein.

Aufgabe 41. (Konstruktion von Quadraturregeln)

Bestimmen Sie Zahlen $\omega_1, \dots, \omega_4$, so dass die Quadraturregel

$$I(f) := \int_0^1 f(x) dx \approx \tilde{I}(f) := \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1) + \omega_3 f'(0) + \omega_4 f'(1)$$

für alle Polynome vom Grad ≤ 3 exakt ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 42. (Integration auf Standardgebieten)

Begründen Sie Ihre Antworten auf folgende Aufgabenstellungen.

a) Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad der Quadraturformel

$$I(f) = \frac{4}{3} (f(1, 0, 0) + f(0, 0, -1) + f(0, 1, 0) + f(0, -1, 0) + f(0, 0, 1) + f(0, 0, -1))$$

auf dem Würfel $[-1, 1]^3$.

b) Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad der Quadraturformel

$$I(f) = \frac{1}{24} (f(r, r, r) + f(s, r, r) + f(r, s, r) + f(r, r, s)) \text{ mit } r = \frac{5 + \sqrt{5}}{20}, s = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{20}$$

für das normierte Tetraeder mit den Ecken $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$. Welche Besonderheit liegt in den Stützstellen vor?

(6 Punkte)

Aufgabe 43. (2D Romberg)

Die Produkt-Sehmentrapezregel

$$(T_0 f)(h) = \frac{h^2}{4} \left(f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) + \right. \\ \left. 2 \sum_{k=1}^{n-1} (f(kh,0) + f(kh,1) + f(0,kh) + f(1,kh)) + \right. \\ \left. 4 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} f(kh, lh) \right)$$

auf $[0, 1]^2$ erlaubt wie das eindimensionale Gegenstück, aus dem es durch eine Tensorproduktkonstruktion entsteht, eine Entwicklung des Integrationsfehlers nach Potenzen von h^2 . Hierbei ergibt sich wie im eindimensionalen Fall das Rekursionschema

$$T_j^k = (T_j f) \left(\frac{h}{2^k} \right) \stackrel{!}{=} \frac{4^j T_{j-1}^{k+1} - T_{j-1}^k}{4^j - 1}.$$

- a) Berechnen Sie explizit die Regel T_2^0 .
- b) Was fällt an Unterschieden zum eindimensionalen Rombergverfahren basierend auf der Trapezregel auf?

(6 Punkte)