# Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Sa Wu

universität bonn

## Übungsblatt 15.

Wiederholungsblatt, keine Abgabe

Offensichtlich ersetzt die Bearbeitung dieses Übungsblattes nicht Teilnahme am bisherigen Übungsbetrieb und den Besuch der Vorlesung. Ferner sind sowohl die in der Vorlesung als auch die in der Übung besprochenen Themen klausurrelevant.

**Aufgabe 44.** (Proximum)

Wir erinnern uns, dass für eine Teilmenge $T$ eines normierten Vektorraums $(V, \|\cdot\|)$, $u \in T$ Proximum an $v \in V$ genannt wird, falls

$$\|u - v\| = \inf_{w \in T} \|w - v\| \ .$$

Begründen Sie Ihre Antworten auf folgende Fragen.

a) Es sei $v = x \mapsto \sin(100\pi x) \in (C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$. Bestimmen Sie für $k < 100$ das Proximum aus den Polynomen $T = \Pi_k$ vom Höchstgrad $k$.

b) Es sei $u$ ein Proximum an $v$ in einem Prähilbertraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit induzierter Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq \|u\| \leq \|v\| \ .$$

**Aufgabe 45.** (Eigenschaften von Matrizen)

Es sei die Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch und positiv definit. Ferner sei die Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch.

a) Ist $A = CB$ im Allgemeinen hermitesch?

b) Zeigen Sie, dass

$$\langle Ax, y\rangle_B = \langle x, Ay\rangle_B$$

bezüglich des durch $B$ induzierten Skalarproduktes gilt.

**Aufgabe 46.** (Projektionsmethoden)

Wir erinnern uns, dass eine Matrix $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ Projektor genannt wird, falls $P^2 = P$. Sie wird orthogonaler Projektor genannt, falls $\ker(P) = P(C^n)^\perp$ bezüglich eines Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass ein Projektor $P$ genau dann ein orthogonaler Projektor ist, wenn $P$ hermitesch ist.

b) Schreiben Sie einen einzelnen Schritt des Gauss-Seidel-Verfahrens als Anwendung eines orthogonalen Projektors $P$. Geben Sie ausserdem den Kern $\ker(P)$ und das Bild $P(C^n)$ dieses Projektors an.

**Aufgabe 47.** (Rudimentäres Programmieren)

Gegeben sei folgendes Stück Code.

```
def algorithm(AA):
    mm, nn = shape(AA)
    XX = eye(mm)
    YY = copy(AA)
    for kk in xrange(nn):
        vv = zeros(mm)
        vv[kk:] = YY[kk:,kk]
        vv[0] += sign(vv[kk])*sqrt(vv.dot(vv))
        vv /= sqrt(vv.dot(vv))
        SS = eye(mm)-2*outer(vv, vv)
        YY = SS.dot(YY)
        XX = XX.dot(SS)
    return XX, YY
```

a) Was wird hier berechnet?

b) Wie lautet die Komplexität dieses Algorithmus? Hierbei genügt die Anzahl der Multiplikationen.

c) Wie lässt sich mit einigen Array Slices und Umformungen die Laufzeit signifikant verbessern?

**Aufgabe 48.** (Eigenwerte)

a) Geben Sie Einschließungen zu den Eigenwerten der Matrix

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 & 5 \\ 1 & 30 & -1 & 1 \\ -5 & -4 & 60 & 14 \\ 0 & -1 & 2 & 100 \end{pmatrix}$$

an.

b) Gegeben sei eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Vektoriteration sei der betragsmäßig größte Eigenwert $\lambda_1$ und ein zugehöriger Eigenvektor $v_1$ bestimmt worden.

i) Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q_v e_1 = \alpha v_1$ für die zugehörige Householder-Matrix $Q_v$ und ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

ii) Zeigen Sie, dass $A$ durch

$$Q_v A Q_v = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

auf Blockstruktur transformiert werden kann, wobei $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ sind.

iii) Zeigen Sie, dass die Matrix $A_1$ die Eigenwerte $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ besitzt.