# Einführung in die Grundlagen der Numerik

Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Wintersemester 2014/2015

# Innenprodukte auf Funktionenräumen

## Gewichtsfunktion

Sei $w : I = (a, b) \to \mathbb{R}_0^+$ eine nicht-negative Funktion und $w \not\equiv 0$ auf $I$ mit

$$\int_I w(x)\ dx < \infty,$$

dann heißt $w$ Gewichtsfunktion.

## Innenprodukt

Zu einer Gewichtsfunktion $w$ definiert

$$\langle f, g \rangle_w := \int_i f(x) g(x) w(x)\ dx$$

auf dem Raum der reellwertigen Polynome ein Inneprodukt.

## Satz

Zu jeder Gewichtsfunktion, d.h. zu jedem Inneprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$, exisitiert eine eindeutig bestimmte Folge von Polynomen $\{u_n\}$ mit $u_n \in \Pi_n$, so dass

$$\langle u_n, u_m \rangle_w = \delta_{n,m}, \quad u_n(x) = \gamma_n x^n + q_{n-1}(x) \quad q_{n-1} \in \Pi_{n-1}, \gamma_n > 0.$$

Diese Folge genügt der Dreitermrekursion

$$a_{n+1} u_{n+1}(x) = (x - b_n) u_n(x) - a_n u_{n-1}(x)$$

wobei $a_n := \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}$, $b_n = \langle x u_n, u_n \rangle_w$, $u_{-1} \equiv 0$ und

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\langle 1, 1 \rangle_w}}.$$

# Clenshaw-Algorithmus

Gegeben $p \in \Pi_n$ in seiner Fourierdarstellung $p = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k$. Dann liefert der Algorithmus:

- Setze $\beta_n := \alpha_n$, $\beta_{n-1} := \frac{\beta_n}{a_n}(x - b_{n-1}) + \alpha_{n-1}$.
- Für $i - n - 2, \ldots, 1$ setze $\beta_i := \frac{\beta_{i+1}}{a_{i+1}}(x - b_i) + \alpha_i - \beta_{i+1}\frac{a_{i+1}}{a_{i+2}}$.
- Setze $p(x) = (\frac{\beta_1}{a_1}(x - b_0) + \alpha_0 - \beta_2\frac{a_1}{a_2})u_0$.

Mit den Koeffizienten der Dreitermrekursionsformel $a_i$,$b_i$ für $u_k$ in $O(n)$ Operationen den Wert von $p$ and einer beliebigen Stelle $x$.

# Nullstellen von Orthogonalpolynomen

## Nullstellen

Die Orthogonalpolynome $u_k$ zu $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ auf $I = (a, b)$ haben ausschließlich reelle einfache Nullstellen, die alle im Inneren von $I = (a, b)$ liegen.

## Schachtelung der Nullstellen

Zwischen je zwei Nullstellen von $u_{n+1}$ liegt genau eine Nullstelle von $u_n$.

# Chebyshev-Polynome

Definitionen

$$w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I = (-1, 1)$$

Rekursionsformel

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) = T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

Auch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

# Legendre-Polynome

Definitionen

$$w(x) := 1, \quad I = (-1, 1)$$

Rekursionsformel

$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x$$

Auch

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(\frac{d}{dx})^n \left((x^2 - 1)^n\right)$$

# Hermite-Polynome

Definitionen

$$w(x) := \exp(-x^2), \quad I = \mathbb{R}$$

Rekursionsformel

$$H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x$$

Auch

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

# Extremaleigenschaften

## Chebyshev

Unter allen monischen Polynomen vom Grad $n$ minimiert das Chebyshev-Polynom $2^{1-n}T_n$ die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $(-1,1)$. Sei $\xi \notin [-1,1]$, dann minimiert das Chebyshev-Polynom $T_n(\xi)^{-1}T_n$ die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $(-1,1)$ unter allen Polynomen vom Grad $n$ mit $p(\xi)=1$.

## Allgemein

Sei $u_n$ das Orthonormalpolynom vom Grad $n$ zu $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$. Dann minimiert $\gamma_n^{-1}u_n$ unter allen monischen Polynomen die gewichtete $L^2$-Norm

$$\|q\|_w := \sqrt{\langle q, q\rangle_w}.$$

# Monische Polynome und Best-Approximation

Es gilt für ein monisches Polynom $q_n$ vom Grad $n$

$$q_n(x) = x^n \pm p_{n-1}(x)$$

mit $p_{n-1} \in \Pi_{n-1}$. Wenn wir also

$$\min_{q \in \Pi_n, q \text{ ist monisch}} \|q\|_w$$

suchen, kann man das umschreiben/interpretieren als Suche nach der Best-Approximation in $\Pi_{n-1}$ zum Monom $x^n$

$$\min_{p_{n-1} \in \Pi_{n-1}} \|x^n - p_{n-1}\|_w.$$