Aufgabe 11: Sei K ein Doppelkegel mit einem Öffnungswinkel von $90°$, vom Ursprung aus in z-Richtung geöffnet.

a) Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zur impliziten Darstellung von K an:
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

b) Wo ist K eine stetig differenzierbare Fläche?

c) Wo lässt sich K lokal als Graph über der xy-Ebene darstellen?

d) Wo lässt sich K lokal als Graph über der yz-Ebene darstellen?

LÖSUNG:

a) Betrachtet man den Schnitt des Kegels mit einer Ebene parallel zur xy-Ebene in der Höhe z, so erhält man einen Kreis mit Radius $|z|$, d.h. es gilt stets $x^2 + y^2 = z^2$. Man definiert also
$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$
und damit ist
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

b) K ist stetig differenzierbar überall dort, wo $\mathrm{Rang}(Dg) = 1$, also $\nabla g \neq 0$. Das heißt:
$$2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
K ist also überall außer in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine stetig differenzierbare zweidimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3$.

c) Nach der Satz von implizite Funktionen lässt sich K überall dort lokal als Graph über der xy-Ebene darstellen, wo $\frac{\partial g}{\partial z} = -2z \neq 0$. Falls $z = 0$, so ergibt sich $x^2 + y^2 = 0$, also $x = y = 0$. K lässt sich also nur in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *nicht* lokal als Graph über der xy-Ebene darstellen.

d) Nach der Satz von implizite Funktionen lässt sich K überall dort lokal als Graph über der yz-Ebene darstellen, wo $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \neq 0$. Falls $x = 0$, so ergibt sich $y^2 - z^2 = 0$, also $y = \pm z$. K lässt sich also überall außer auf den beiden Geraden $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \pm\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ lokal als Graph über der yz-Ebene darstellen.